Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de teste de avaliação [março – 2019]

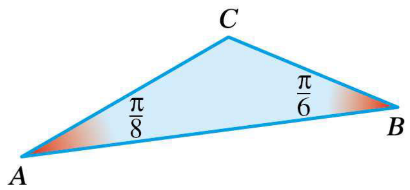
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado de cada caderno.

CADERNO 1 (É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$.
Fixada uma unidade e com as amplitudes dos ângulos expressas em radianos, sabe-se que:



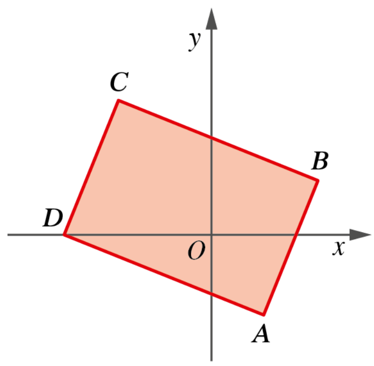
$B\hat{A}C = \frac{\pi}{8}$ $\quad$ $C\hat{B}A = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $\overline{BC} = 4$

Qual dos seguintes valores representa um valor de $\overline{AB}$ arredondado às centésimas?

(A) $5,33$ **(B)** $8,29$ **(C)** $5,23$ **(D)** $22,67$

2. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- os pontos A e B têm coordenadas, respetivamente, $(2, -3)$ e $(4, 2)$;
- o ponto D pertence ao eixo das abcissas.

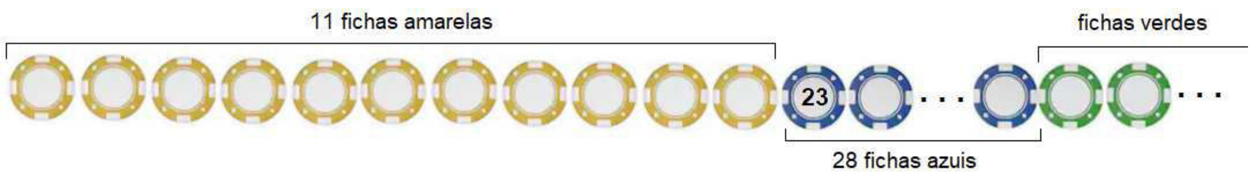
2.1. A inclinação da reta BC, arredondada às décimas do grau, é:

(A) $158,2°$ **(B)** $111,8°$

(C) $21,8°$ **(D)** $68,2°$

2.2. Determina as coordenadas do ponto D.

3. Um conjunto de fichas coloridas foram dispostas em linha. As primeiras 11 fichas são amarelas, as 28 fichas seguintes são azuis e as restantes são verdes.



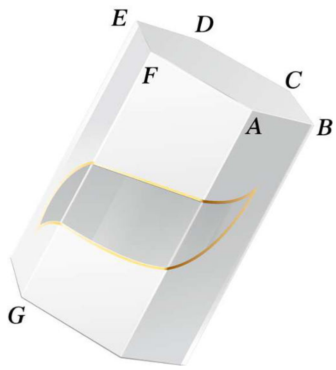
Pretende-se numerar as fichas, em progressão aritmética, de modo que:

- a primeira ficha azul tenha o número 23;
- a soma dos números das fichas azuis seja 2156.

3.1. Mostra que o número da última ficha azul é 131.

3.2. Determina a soma dos números das fichas amarelas.

4. Na figura está representada uma caixa com a forma de prisma hexagonal regular.



Em relação a um determinado referencial o.n. $Oxyz$, sabe-se que:

- o plano ABC é definido pela equação $3x-2y-5z+7=0$;
- o vértice G tem coordenadas $(-1, 4, 3)$;
- a medida da área do hexágono $[ABCDEF]$ é 80.

Determina o volume do prisma, começando por determinar as coordenadas do ponto F. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

5. No passado dia 5 de março, entre as 0 e as 16 horas, houve vários registos da intensidade do vento, permitindo estabelecer o seguinte modelo matemático.

$$I(t)=27+12\sin\left(\frac{3\pi t-4\pi}{24}\right);\ t\in[0,16]$$

- t, em horas;
- $I(t)$, em km/h.

A seguir é apresentada parte da conhecida **Escala de Beaufort** que classifica a intensidade dos ventos.

Grau	Designação	Intensidade (km/h)
---	---	---
3	Brisa fraca	De 12 a 19
4	Brisa moderada	De 20 a 28
5	Brisa forte	De 29 a 38
6	Vento fraco	De 39 a 49
7	Vento forte	De 50 a 61
---	---	---

Atendendo ao modelo apresentado e à Escala de Beaufort responde às seguintes questões, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

5.1. Em algum momento, no período de tempo considerado, a intensidade do vento pode ter sido classificada como **Vento forte**? Justifica.

5.2. Durante quanto tempo a intensidade do vento foi classificada de **Brisa fraca**?

Apresenta o resultado em horas e minutos, sendo os minutos arredondados às unidades.

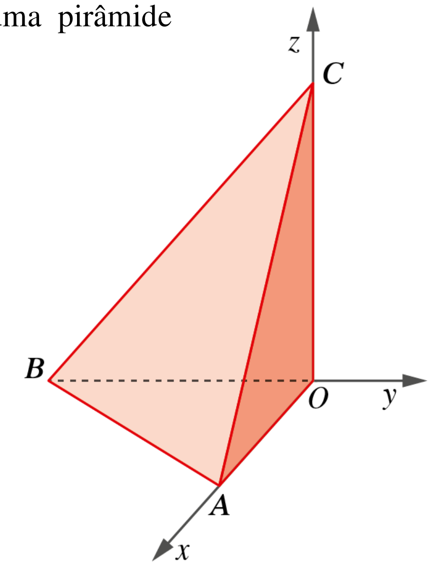
FIM (Caderno 1)

Cotações									Total
Questões – Caderno 1	1.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.1.	5.2.	
Pontos	12	12	15	15	20	20	12	14	120

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora.)

6. Na figura, em referencial o.n. $Oxyz$, está representada uma pirâmide $[OABC]$. Sabe-se que:

- o vértice A pertence a Ox;
- o vértice B pertence a Oy;
- o vértice C pertence a Oz;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z = 4$.



6.1. Determina o valor do produto escalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}$.

6.2. O ponto médio de $[BC]$ é centro de uma superfície esférica à qual pertence o ponto O. Determina, na forma reduzida, uma equação dessa superfície esférica.

7. Considera, para $k \in \mathbb{R}$, a sucessão (w_n) definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = k \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{15}{4}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sabendo que $w_{25} = 135$, determina o valor de k.

8. Considera a sucessão (v_n) definida por: $v_n = \begin{cases} \dfrac{3n-2}{5n} & \text{se} \quad n > 120 \\ \dfrac{4n^2+3n-1}{2n-5} & \text{se} \quad n \leq 120 \end{cases}$

Pode afirmar-se que $\lim v_n$ é igual a:

(A) $\dfrac{3}{5}$ **(B)** $+\infty$ **(C)** 2 **(D)** 0

9. Considera a progressão geométrica (u_n) tal que: $\begin{cases} u_1 = -7 \\ u_{n+1} = \dfrac{5}{6} u_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

A soma de todos os termos da progressão é:

(A) $-\dfrac{35}{6}$ **(B)** 0 **(C)** $+\infty$ **(D)** -42

FIM (Caderno 2)

Cotações						Total
Questões – Caderno 2	6.1.	6.2.	7.	8.	9.	
Pontos	18	20	18	12	12	80

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r : *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica.)

1. $A\hat{C}B = \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{24}$

Pela lei dos senos: $\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{4} = \frac{\sin\frac{17\pi}{24}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{4\sin\frac{17\pi}{24}}{\sin\frac{\pi}{8}}$

Logo, $\overline{AB} \approx 8{,}29$.

Resposta: Opção **(B)**

2.1. Sabe-se que $A(2,-3)$ e $B(4,2)$. Então, $\overrightarrow{AB}(2,5)$.

Representando os declives de *AB* e *BC* respetivamente por m_{AB} e m_{BC}.

Atendendo a que *AB* e *BC* são retas perpendiculares, $m_{AB} = \frac{5}{2}$ e $m_{BC} = -\frac{2}{5}$.

Designando por α a inclinação de *BC*, em graus:

$\tan\alpha = -\frac{2}{5} \wedge 90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$

Assim, conclui-se que $\alpha \approx 158{,}2^{\circ}$.

Resposta: Opção **(A)**

2.2. Seja $y = mx + b$ a equação reduzida da reta *AD*.

Como a reta *AD* é perpendicular a *AB* e passa por *A*:

$-3 = -\frac{2}{5}\times 2 + b \Leftrightarrow -3 + \frac{4}{5} = b \Leftrightarrow -\frac{11}{5} = b$

Assim, a equação da reta *AD* é $y = -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}$.

Como *D* tem ordenada igual a 0, então:

$-\frac{2}{5}x - \frac{11}{5} = 0 \Leftrightarrow -2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$

Resposta: $D\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$

3.1. Seja x o número da última ficha azul.

Como a soma dos números das fichas azuis é 2156, tem-se:

$$\frac{23+x}{2}\times 28=2156 \Leftrightarrow (23+x)\times 14=2156 \Leftrightarrow 23+x=154 \Leftrightarrow x=131$$

Resposta: O número da última ficha azul é 131, como se pretendia provar.

3.2. Sendo (u_n) a sucessão dos números das fichas, sabe-se que $u_{12}=23$ e $u_{39}=131$.

Sendo r a razão da progressão:

$$u_{39}=u_{12}+(39-12)r \Leftrightarrow 131=23+27r \Leftrightarrow r=4$$

Então, $u_{12}=u_1+11\times r$, ou seja, $23=u_1+11\times 4 \Leftrightarrow u_1=-21$.

Sabe-se que $u_{11}=u_{12}-r=19$, logo:

$$S_{11}=\frac{-21+19}{2}\times 11=-11$$

Resposta: A soma dos números das fichas amarelas é -11.

4. Para determinar as coordenadas de F, considere-se uma equação vetorial da reta GF.

Como GF é perpendicular ao plano ABC, pode tomar-se um vetor normal ao plano, por exemplo $(3,-2,-5)$, como vetor diretor da reta.

$$(x,\, y,\, z)=(-1,\, 4,\, 3)+k(3,\, -2,\, -5),\ \ k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x,\, y,\, z)=(-1+3k,\, 4-2k,\, 3-5k),\ \ k\in\mathbb{R}$$

O ponto F é o ponto desta reta que pertence ao plano ABC.

$$3(-1+3k)-2(4-2k)-5(3-5k)+7=0 \Leftrightarrow -3+9k-8+4k-15+25k+7=0 \Leftrightarrow$$

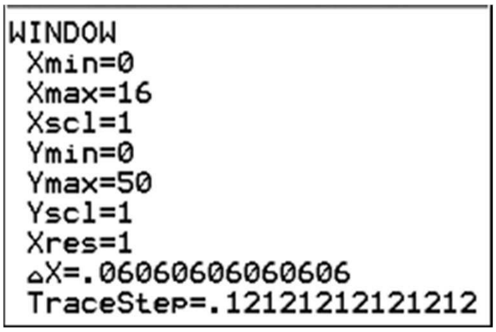
$$\Leftrightarrow 38k-19=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$$

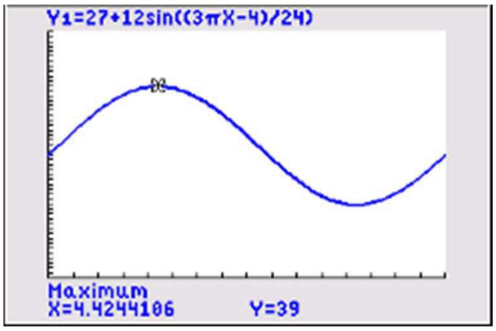
Assim, $F\left(\frac{1}{2},\, 3,\, \frac{1}{2}\right)$, pelo que: $\overline{GF}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{38}}{2}$

$$V=80\times\frac{\sqrt{38}}{2}=40\sqrt{38}\approx 246{,}6$$

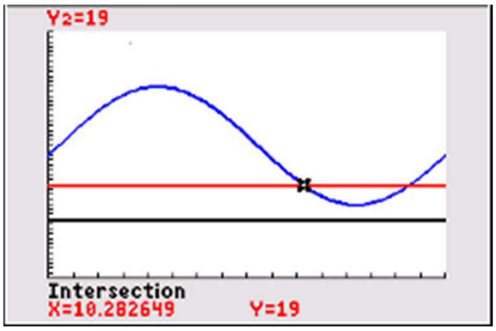
Resposta: O volume é, aproximadamente, 246,6 unidades de volume.

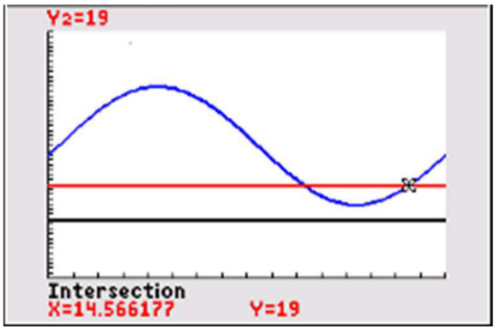
5.1. Inserindo a expressão $I(t) = 27 + 12\sin\left(\frac{3\pi t - 4\pi}{24}\right)$; $t \in [0, 16]$ na calculadora e, considerando uma janela adequada, é possível identificar o máximo absoluto da função e verificar que é 39 km/h, não tendo atingido, assim, a intensidade de 50 km/h para se considerar **Vento forte** de acordo com a escala de Beaufort.





5.2. Considerando as funções constantes $f(t) = 19$ e $g(t) = 12$, visualizam-se as respetivas representações gráficas e determinam-se os pontos de interseção com o gráfico de *I*.





Seja a a diferença entre os instantes identificados.

$a = 14{,}5662 - 10{,}2826 = 4{,}2836$

$0{,}2836 \times 60 = 17{,}016$

Resposta: A intensidade do vento foi classificada de **Brisa fraca** durante, aproximadamente, 4 h 17 min.

CADERNO 2

(Não é permitido o uso de calculadora.)

6.1. Os pontos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ e $C(0, 0, c)$ pertencem ao plano ABC, logo:

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ -b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$

Assim, $A(2, 0, 0)$, $B(0, -4, 0)$ e $C(0, 0, 4)$.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = (-2, 0, 4).(2, 4, 0) = -4$$

Resposta: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$

6.2. Sendo $B(0, -4, 0)$ e $C(0, 0, 4)$, seja M o ponto médio de $[BC]$.

$M(0, -2, 2)$

$$\overline{OM} = \sqrt{0 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Resposta: A equação da superfície esférica é $x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$.

7. $w_{n+1} = w_n + \frac{15}{4} \Leftrightarrow w_{n+1} - w_n = \frac{15}{4}$

A sucessão (w_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{15}{4}$.

$$w_{25} = w_1 + 24r \Leftrightarrow 135 = k + 24 \times \frac{15}{4} \Leftrightarrow 135 = k + 90 \Leftrightarrow k = 45$$

Resposta: O valor de k é 45.

8. Pode afirmar-se que $\lim v_n$ é igual a:

$$\lim v_n = \lim \frac{3n-2}{5n} = \lim \frac{n\left(3 - \frac{2}{n}\right)}{5n} = \lim \frac{3 - \frac{2}{n}}{5} = \frac{3}{5}$$

Resposta: Opção **(A)**

9. $u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{6}$

A progressão geométrica (u_n) tem razão $\frac{5}{6}$.

$$S = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(-7 \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}\right) = -7 \times \frac{1-0}{\frac{1}{6}} = -42$$

Resposta: Opção **(D)**