Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis $\left(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega\right)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,8$
- $P(B) = 0,36$
- $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,64$

O valor da probabilidade condicionada $P\left(A | B\right)$ é:

(A) $\frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{3}{5}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Sabe-se que as únicas assíntotas ao gráfico de f são as retas definidas por $x = 2$ e $y = -1$.

As equações das assíntotas ao gráfico da função g, sendo $g(x) = 5 - f(x-3)$ são:

(A) $x = 5$ e $y = 6$ **(B)** $x = 5$ e $y = -6$

(C) $x = -1$ e $y = 4$ **(D)** $x = -1$ e $y = 4$

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o ponto P, de coordenadas $(1,2)$, pertence ao gráfico de f;
- a reta tangente ao gráfico de f no ponto P é definida pela equação $y = 3x - 1$.

O número que representa $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1}$ é:

(A) $-\frac{1}{2}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{3}{2}$ **(D)** 0

4. Considera a função *f*, de domíno $\mathbb{R}$, definida por:

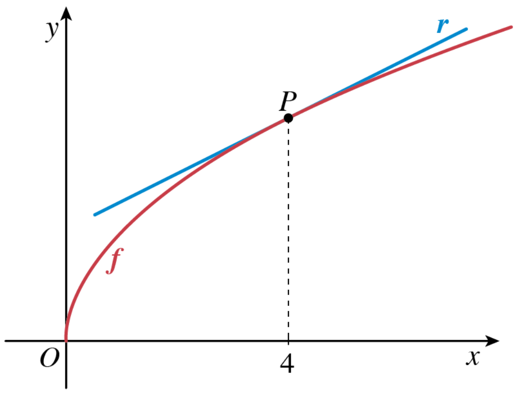
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2-x} & \text{se } x\leq 1\\ \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} & \text{se } x>1\end{cases}$$

4.1 Averigua se a função *f* é contínua $x=1$.

4.2 Determina, caso existam, as equações das assíntotas ao gráfico de *f* paralelas aos eixos coordenados.

4.3 Mostra que a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1 é paralela à reta *s* definida pela equação $(x,y)=(-2,5)+k(9,2),\ k\in\mathbb{R}$.

5. Na figura estão representados o gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, e uma reta *r* que é tangente ao gráfico da função no ponto *P*, de abcissa 4.



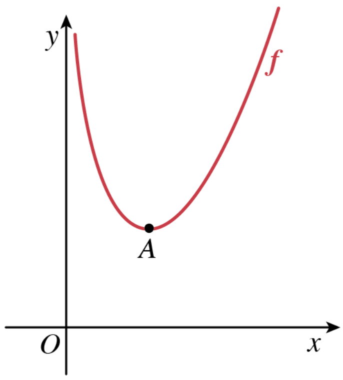
A reta *r* é definida pela equação:

$$(x,y)=(8,6)+k(-4,-2)\quad,\ k\in\mathbb{R}$$

5.1 Indica o valor de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

5.2 Mostra que $f(4)=8f'(4)$.

6. Na figura está representada uma função conínua, *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que f', função derivada de *f*, é definida por:



$$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$$

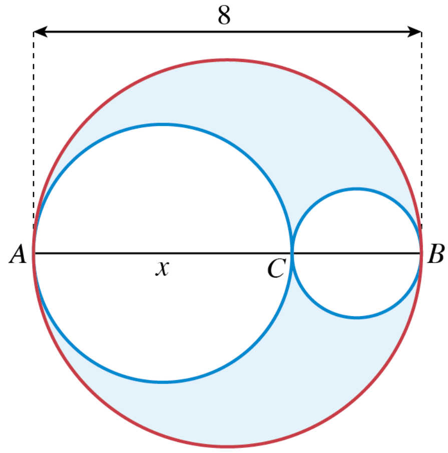
Sabe-se que a ordenada do ponto *A* é mínimo absoluto da função *f*.

6.1 Determina a abcissa do ponto *A*.

6.2 Mostra que o gráfico de *f* não tem pontos de inflexão.

7. Na figura estão representadas:

- uma circunferência de diâmetro $[AB]$;
- uma circunferência de diâmetro $[AC]$;
- uma circunferência de diâmetro $[BC]$.



Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao segmento de reta $[AB]$;
- $\overline{AB} = 8$;
- $\overline{AC} = x$, com $x \in \left]0, 8\right[$.

Seja $S(x)$ a área da região colorida, dada em função de x.

Mostra que $S(x) = \frac{\pi}{2}\left(8x - x^2\right)$ e determina para que valor de x a área colorida é máxima.

FIM

Cotações												Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6.1	6.2	7	
Cotações	15	15	15	20	20	20	15	18	20	20	22	**200**

1. $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)$, ou seja, $0{,}8-P(A\cap B)=0{,}64$

Então: $P(A\cap B)=0{,}16$ $y=1$

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}16}{0{,}36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$$

Resposta: A opção correta é: **(A)** $\frac{4}{9}$

2.

Função	Assíntota vertical	Assíntota horizontal
$y=f(x-3)$	$x=2+3=5$	$y=-1$
$y=-f(x-3)$	$x=5$	$y=1$
$g(x)=5-f(x-3)$	$x=5$	$y=1+5=6$

Resposta: A opção correta é: **(A)** $x=5$ e $y=6$

3. $f'(1)=3$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Resposta: A opção correta é: **(C)** $\frac{3}{2}$

4.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2-x} & \text{se } x\le 1\\[2mm] \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} & \text{se } x>1\end{cases}$$

4.1 $1\in D_f$. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{2-x}=\frac{1}{2-1}=1$ e $f(1)=\frac{1}{2-1}=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x^2+x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{x+2}=\frac{2}{3}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, conclui-se que *f* não é contínua em $x=1$.

Resposta: A função *f* não é contínua em $x=1$.

4.2 Assíntotas verticais:

A função é contínua em todos os pontos do domínio, exceto em $x=1$.

Os limites laterais, quando x tende para 1, são deferentes de $\pm\infty$.

Resulta que não há assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x^2+x-2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2-0}{+\infty(1-0-0)}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

Resposta: As equações das assíntotas ao gráfico de *f* paralelas aos eixos coordenados são $y=-1$ e $y=0$.

4.3 Declive da reta *s*: $m=\frac{2}{9}$

Se $x<1$, $f(x)=\frac{x}{2-x}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{1\times(2-x)-(2-x)'\times x}{(2-x)^2}=\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=\frac{2}{(2-x)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{2}{(2+1)^2}=\frac{2}{9}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1 é igual ao declive da reta *s*.

Conclui-se que são retas paralelas.

5.

5.1 Declive da reta *r*: $m=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

$$f'(4)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)=\frac{1}{2}$$

Resposta: $\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{1}{2}$

5.2 Mostrar que $f(4) = 8f'(4)$

O ponto P pertence ao gráfico de f, mas também pertence à reta r, logo:

$(4, f(4)) = (8,6) + k(-4,-2)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 4 = 8 - 4k \\ f(4) = 6 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ f(4) = 4 \end{cases}$$

Assim: $f(4) = 8f'(4)$, ou seja, $4 = 8 \times \frac{1}{2}$ (verdadeiro)

6.

6.1 $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, atendendo a que $x \in \mathbb{R}^+$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

Logo, a função f atinge o valor mínimo absoluto no ponto de abcissa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: A abcissa do ponto A é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.2 $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$f''(x) = \left(2x - \frac{1}{x}\right)' = 2 + \frac{1}{x^2}$

A função f'' é positiva em todos os pontos do domínio (não muda de sinal).

Conclui-se que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

7. Área de um círculo de raio r: πr^2

Área do círculo de diâmetro $[AB]$: $\pi \times 4^2 = 16\pi$

Área do círculo de diâmetro $[AC]$: $\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}x^2$

Área do círculo de diâmetro $[BC]$: $\pi \times \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 16x + 64\right)$

Área da região colorida: $S(x) = 16\pi - \left[\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 16x + 64\right)\right]$

$$S(x) = 16\pi - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 - 4\pi x + 16\pi\right) = 4\pi x - \frac{\pi}{2}x^2 = \frac{\pi}{2}\left(8x - x^2\right)$$

$x \in \left]0,8\right[$ e $S(x) = \frac{\pi}{2}\left(8x - x^2\right)$

$$S'(x) = \frac{\pi}{2} \times \left(8x - x^2\right)' = \frac{\pi}{2}(8 - 2x)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

x	0		4		8
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

Resposta: A área colorida é máxima para $x = 4$.

FIM

	Cotações											Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6.1	6.2	7	
Cotações	15	15	15	20	20	20	15	18	20	20	22	**200**