Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \dots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Uma empresa têxtil vende os seus produtos para os Estados Unidos da América e para o Japão, entre outros países.

1.1. Relativamente a essa empresa, sabe-se que:

- o número de vendas para os Estados Unidos da América é o dobro do número de vendas para o Japão;
- o número de vendas para, pelo menos, um dos dois países é o triplo do número de vendas feitas para os dois países em simultâneo.

Escolhe-se, ao acaso, um produto dessa empresa.

Determine a probabilidade de esse produto ser vendido para o Japão, sabendo que é vendido para os Estados Unidos da América.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. O diretor comercial da empresa escolheu três conjuntos de atoalhados de cores distintas, quatro robes distintos e cinco toalhas de praia com padrões diferentes para dispor, lado a lado, na estante da sala de reuniões.

De quantas maneiras se podem dispor os doze produtos, de modo que os do mesmo tipo fiquem juntos?

(A) $17\,280$

(B) $51\,840$

(C) $103\,680$

(D) $479\,001\,600$

2. Seja f a função, de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por:

$$f(x) = -x^2 + 2\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- as abcissas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

3. Um ponto P desloca-se numa reta numérica de tal forma que a respetiva abcissa, como função de t, é dada pela expressão:

$$f(t) = \sqrt{2}\cos(\pi t) + \sqrt{2}\operatorname{sen}(\pi t)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in \mathbb{R}_0^+$).

Resolva a alínea **3.1.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

3.1. Prove que se trata de um oscilador harmónico.

Indique a amplitude, o período, a frequência do movimento, bem como o respetivo ângulo de fase.

3.2. Sejam A e B dois pontos do gráfico de f, de abcissas a e b, respetivamente, tais que:

- $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$
- $b = 2 + a$

Sejam C e D os pontos de interseção do gráfico de f com a reta de equação $y = -\frac{3}{2}$ pertencentes ao intervalo $\left]0, \frac{13}{5}\right[$, sendo C o ponto de menor abcissa.

Determine o(s) valor(es) da(s) abcissa(s) do ponto A, para a qual a área do quadrilátero $[CABD]$ é igual a 4.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor das abcissas dos pontos C e D com arredondamento às centésimas;
- indicar o(s) valor(es) da(s) abcissa(s) do ponto A com arredondamento às centésimas.

4. A Joana aderiu a um plano de poupança com uma taxa de juro semestral de $0{,}5\%$ em regime de juro composto.

Para tal, efetuou, em janeiro de 2019, um depósito de 5000 €.

Sabendo que este plano de poupança termina em janeiro de 2029, qual é o capital acumulado ao fim deste período de tempo?

(A) $5025{,}06$

(B) $5050{,}24$

(C) $5255{,}70$

(D) $5524{,}48$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^{-4}}\right)$$

Considere a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n}$.

Qual é o valor de $\lim\ f(u_n)$?

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) e

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1	**1.2**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.**	
16	8	20	16	20	8	8	**96**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Seja f uma função real de domínio $[-1,1]$. Sabe-se que f é contínua.

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função f é diferenciável.

(B) A função f tem pelo menos um zero.

(C) A função f é injetiva.

(D) A função f tem máximo e mínimo absolutos.

7. Seja f uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que f é uma função par e que, para um certo número real positivo a, se tem $f(a) \neq f(0)$.

Mostre que a equação $f(x) = f(x-a)$ é possível no intervalo $]0, a[$.

8. Para cada real k, considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - k^2 & \text{se} \quad x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

8.1. Determine os valores reais de k de modo que $\lim_{x \to 0^-} f(x) < f(0)$.

8.2. Considere $k = 2$.

Estude o gráfico da função f quanto à existência de assíntotas horizontais, e, caso existam, escreva as suas equações.

8.3. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine o valor da derivada da função f no ponto de abcissa 1.

9. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, por $f(x) = 1 + \cos x$.

Considere as seguintes proposições p e q:

p: "f pode ser definida por $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \cos x$."

q: "O contradomínio da função f é $\left[\frac{3}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$."

Em relação ao valor lógico das proposições, podemos concluir que:

(A) são ambas verdadeiras.

(B) são ambas falsas.

(C) apenas p é verdadeira.

(D) apenas q é verdadeira.

10. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 3x + 1) \;=\; 0$;
- f é uma função par;
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real positivo x.

Considere as afirmações seguintes:

(I) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

(II) A reta de equação $(x, y) = (1, 2) + k(1, -3), k \in \mathbb{R}$ pode ser uma reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

(III) Existe $c \in \,]2{,}3[$ tal que $f'(c) = f(3) - f(2)$.

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se **cada uma** das afirmações é verdadeira ou falsa.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	**7.**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**9.**	**10.**	
8	20	18	16	18	8	16	**104**

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: “O produto ser vendido para os Estados Unidos da América.”

B: “O produto ser vendido para o Japão.”

Sabemos que:

- $P(A) = 2P(B)$
- $P(A \cup B) = 3P(A \cap B)$

Assim:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 3P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{2}P(A) = 4P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}P(A) = 4P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8}P(A)$$

Logo:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}P(A)}{P(A)} = \frac{3}{8}$$

1.2. Opção (C)

3! é o número de maneiras distintas de permutar os três conjuntos de atoalhados de cores diferentes entre si; 4! é o número de maneiras distintas de permutar os quatro robes distintos entre si; 5! é o número de maneiras distintas de permutar as cinco toalhas de praia distintas entre si e 3! é o número de maneiras distintas de escolher as posições dos três tipos de produtos (atoalhados, robes e toalhas de praia).

Assim, o valor pedido é igual a $3! \times 4! \times 5! \times 3! = 103\,680$.

2. $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x} \qquad \boldsymbol{D_f = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f'(x) = -2x + 2\cos x + 2\text{sen}x\cos x = -2x + 2\cos x + \text{sen}(2x)} \qquad \boldsymbol{D_{f'} = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f''(x) = -2 - 2\text{sen}\, x + 2\cos(2x)} \qquad \boldsymbol{D_{f''} = [-\pi, \pi]}$

$\boldsymbol{f''(x) = 0}$

$$\boldsymbol{2\cos(2x) - 2\text{sen}x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2(1 - 2\text{sen}^2 x) - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2 - 4\text{sen}^2 x - 2\text{sen}x - 2 = 0}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow -2\text{sen}x(2\text{sen}x + 1) = 0}$$

$$\Leftrightarrow -2\text{sen}x = 0 \quad \vee \quad \text{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $[-\pi, \pi]$: $x = -\pi, x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = 0$ e $x = \pi$

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		π
$-2\text{sen}x$	0	+	+	+	+	+	0	−	0
$2\text{sen}x + 1$	+	+	0	−	0	+	+	+	+
Sinal de f''	0	+	0	−	0	+	0	−	0
Sentido das concavidades do gráfico de f	$f(-\pi)$	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	$f(\pi)$

Cálculos auxiliares

$2\text{sen}(-\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 \quad (> 0)$

$2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -2 + 1 = -1 \quad (< 0)$

$2\text{sen}(\pi) + 1 = 0 + 1 = 1 \quad (> 0)$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right]$ e em $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right]$ e em $[0, \pi]$; o gráfico de f tem três pontos de inflexão de abcissas $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$ e 0.

3.

3.1. $f(t) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}(\pi t)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi t) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\text{sen}(\pi t)\right) =$

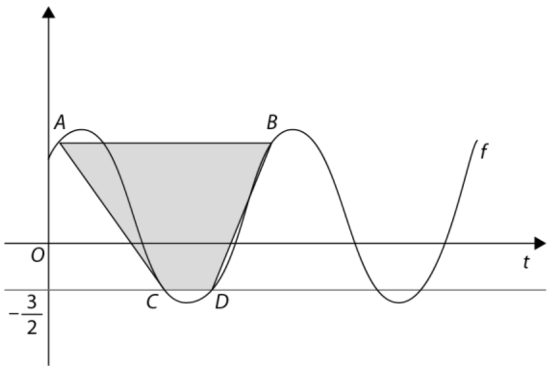
$$= 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4} + 2\pi\right) =$$

$$= 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

Como $2 > 0$, $\pi > 0$ e $\frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi[$, $f(t) = 2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right)$ é um oscilador harmónico de amplitude 2, período $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, frequência $\frac{1}{2}$ e ângulo de fase $\frac{7\pi}{4}$.

3.2.



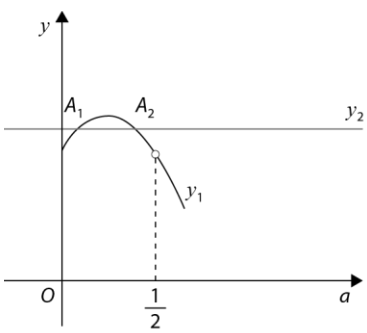
$C\left(c, -\frac{3}{2}\right) \quad c \approx 1{,}02$

$D\left(d, -\frac{3}{2}\right) \quad d \approx 1{,}48$

$$A_{[CABD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times h \approx \frac{2 + (1{,}48 - 1{,}02)}{2} \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + \frac{3}{2}\right) =$$
$$= \frac{2{,}46}{2} \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right) =$$
$$= 1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right)$$

Pretendemos determinar $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tal que $1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi a + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right) = 4$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora:



$y_1 = 1{,}23 \times \left(2\cos\left(\pi a + \frac{7\pi}{4}\right) + 1{,}5\right)$

$y_2 = 4$

$A_1(a_1, 4) \quad a_1 \approx 0{,}09$

$A_2(a_2, 4) \quad a_2 \approx 0{,}41$

Assim, o ponto A pode ter abcissa igual a 0,09 ou 0,41.

4. Opção (D)

$$5000\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{2\times 10} = 5000\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{20} \approx 5524{,}48$$

5. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n} = \lim\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^{3n} = \lim \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{3n}} = \frac{\left[\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\right]^3}{\left[\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right]^3} = \frac{(e^2)^3}{(e^3)^3} = e^{6-9} = e^{-3}$$

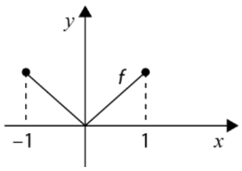
$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^{-3}} f(x) = \lim_{x\to e^{-3}}\left[\ln\left(\frac{x}{e^{-4}}\right)\right] = \ln\left(\frac{e^{-3}}{e^{-4}}\right) = \ln(e) = 1$$

Caderno 2

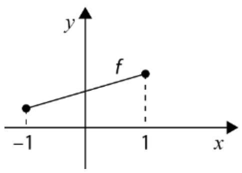
6. Opção (D)

f é contínua em $[-1,1]$, logo, pelo teorema de Weierstrass, a função f tem máximo e mínimo absolutos.

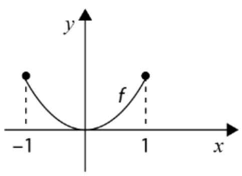
De seguida, apresentamos contraexemplos para justificar que as outras opções não são verdadeiras.



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não é diferenciável em $x=0$.



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não tem zeros..



f é contínua em $[-1,1]$. Porém, f não é injetiva.

7. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=f(x)-f(x-a)$.

1) g é contínua por se tratar da diferença de duas funções contínuas (a função f e a composta da função f com uma função polinomial). Em particular, g é contínua em $[0,a]$.

2) $g(0)=f(0)-f(-a)=f(0)-f(a)$

$g(a)=f(a)-f(0)=-g(0)$

Como $f(a)\neq f(0)$, então, $g(0)$ e $g(a)$ tem sinais contrários, donde se conclui que zero é um valor intermédio entre estas imagens.

Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c\in\,]0,a[: g(c)=0$$

isto é:

$\exists c\in\,]0,a[: f(c)-f(c-a)=0 \Leftrightarrow \exists c\in\,]0,a[: f(c)=f(c-a)$

Logo, a equação $f(x)=f(x-a)$ é possível no intervalo $]0,a[$.

8.

8.1.

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - k^2\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\text{sen}(4x)}{2x} - k^2\right) =$

$$= \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-\text{sen}(4x)}{4x}\times 2 - k^2\right) =$$

$$= -2\lim_{x\to 0^-}\frac{\text{sen}(4x)}{4x} - k^2 =$$

$$= \underbrace{-2\lim_{4x\to 0^-}\frac{\text{sen}(4x)}{4x}}_{\text{limite notável}} - k^2 =$$

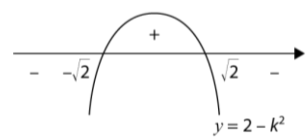
$$= -2\times 1 - k^2 =$$

$$= -2 - k^2$$

- $f(0) = -4$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) < f(0) \Leftrightarrow -2 - k^2 < -4 \Leftrightarrow 2 - k^2 < 0$

$\Leftrightarrow k < -\sqrt{2} \ \vee \ k > \sqrt{2}$



C.S. $= \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

8.2. $k = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - 4 & \text{se} \quad x < 0 \\ -4 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

- $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)}{2x} - 4\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\times\frac{1}{2x}\right] - \lim_{x\to -\infty} 4 =$$

$$\underbrace{=}_{(1)} 0 - 4 =$$

$$= -4$$

Cálculo auxiliar

(1) $\lim_{x\to -\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\times\frac{1}{2x}\right] = 0$, pois

$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e

$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{2x} = 0$.

A reta de equação $y = -4$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

- $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x^2\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

8.3. $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x^2}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-x^2}{x^2(x-1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x-x^4}{x^2(x-1)(\sqrt{x}+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(-x^3-x^2-x)}{x^2(x-1)(\sqrt{x}+x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x^3-x^2-x}{x^2(\sqrt{x}+x^2)} = -\frac{3}{2}$$

Cálculo auxiliar

	-1	0	0	1	0
1		-1	-1	-1	0
	-1	-1	-1	0	$0 = R$

9. Opção (B)

$(\text{sen}\, x + \cos x)^2 + \cos x = \text{sen}^2\, x + 2\text{sen}x\cos x + \cos^2 x + \cos x =$

$= 1 + 2\text{sen}x\cos x + \cos x$

Por exemplo, se $x = \frac{\pi}{4}$, então:

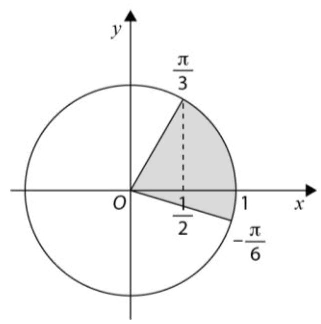
$1 + 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Porém, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, a proposição p é falsa.

O contradomínio da restrição da função cosseno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ é $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, logo o contradomínio da função f é $\left[\frac{1}{2} + 1, 1 + 1\right] = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Logo, a proposição q é falsa.



10. Sabe-se que $\lim_{x \to -\infty}(f(x) - (3x-1)) = 0$, logo a reta de equação $y = 3x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$. Como f é par, então o gráfico de f admite uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$. Logo, a gráfico de f não pode admitir uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$. Portanto, a afirmação (I) é falsa.

Sabe-se também que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) > 0$. Assim, o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é positivo, logo não pode ser igual a -3, pelo que a reta de equação $(x, y) = (1,2) + k(1, -3), k \in \mathbb{R}$ não pode ser tangente ao gráfico de f em $x = 1$. Portanto, a afirmação (II) é falsa.

Como $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) > 0$, concluímos que:

- f é contínua em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, f é contínua em $[2,3]$;
- f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e, em particular, f é diferenciável em $]2,3[$.

Logo, pelo teorema de Lagrange, concluímos que existe $c \in]2,3[$ tal que $f'(c) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$, ou seja, existe $c \in]2,3[: f'(c) = f(3) - f(2)$. Portanto, a afirmação (III) é verdadeira.