Teste de Matemática A

2018 / 2019

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

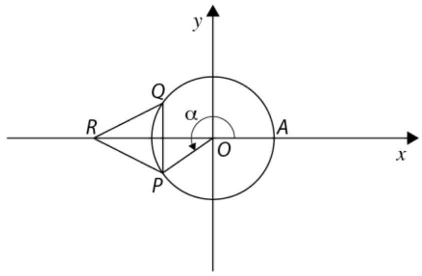
Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto P está no terceiro quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto Q pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta $[PQ]$ é paralelo ao eixo Oy;
- o ponto R tem coordenadas $(-3,0)$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

O perímetro do triângulo $[PQR]$ é dado, em função de α, por:

(A) $-2\text{sen}\,\alpha + 2\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$ **(B)** $-2\text{sen}\,\alpha + 2\sqrt{10 - 6\cos\alpha}$

(C) $2\text{sen}\,\alpha + 2\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$ **(D)** $2\text{sen}\,\alpha + 2\sqrt{10 - 6\cos\alpha}$

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{x: x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\text{sen}\,x}$$

2.1. Prove a seguinte igualdade, para todo o x onde a expressão tem significado.

$$f(x) = \frac{1}{\text{tg}\,x}$$

2.2. Determine, no intervalo $]-\pi, 2\pi[\backslash\{0, \pi\}$, os valores de x tais que $f(x) = 3\,\text{tg}\,x$.

2.3. Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa, com arredondamento às centésimas, do ponto P do gráfico de f tal que:

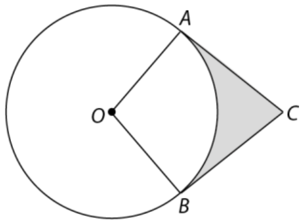
- $[OP]$ é diagonal de um quadrado em que dois dos lados estão contidos nos eixos coordenados;
- P pertence ao primeiro quadrante;
- o lado do quadrado é inferior a $\frac{\pi}{2}$.

Na sua resposta reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s) bem como as suas coordenadas arredondadas às centésimas.

3. Considere o círculo de centro O e raio $3\ \text{cm}$, representado na figura.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência e o comprimento do arco (menor) AB é igual a $4\ \text{cm}$;
- as retas tangentes à circunferência no ponto A e no ponto B intersetam-se no ponto C.

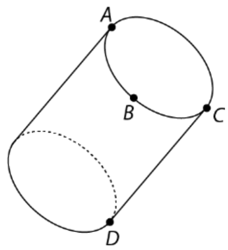


A área da região a sombreado é aproximadamente igual a:

(A) $3{,}08$ **(B)** $2{,}08$ **(C)** $1{,}08$ **(D)** $0{,}08$

4. Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere o cilindro de revolução representado na figura. Admita que:

- uma das bases do cilindro está contida no plano ABC e este é definido por $y - z = 0$;
- $[AC]$ é um diâmetro dessa base;
- o ponto A tem coordenadas $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$;
- o ponto B pertence à circunferência que limita essa base do cilindro e tem coordenadas $\left(1 + \sqrt{2}, 1, 1\right)$;
- $[CD]$ é uma geratriz do cilindro.



4.1. Determine uma equação cartesiana do plano BCD.

4.2. Sabendo que a outra base do cilindro está contida no plano de equação $y - z + 6 = 0$, determine a altura do cilindro.

5. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n+6}{n+4}$.

Prove que a sucessão (u_n) é limitada.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

<table>
<tr><th colspan="9">Item</th></tr>
<tr><th colspan="9">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>2.1</td><td>2.2</td><td>2.3</td><td>3.</td><td>4.1</td><td>4.2</td><td>5.</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>8</td><td>20</td><td>20</td><td>20</td><td>121</td></tr>
</table>

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

6. Para um certo número real a, diferente de zero, são perpendiculares as retas r e s, definidas, num referencial o.n. Oxy, pelas condições:

$$r:(x,y)=(1,-2)+k(-a,a-2), k\in\mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: ay+a^2x-1=0$$

Qual é o valor de a?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 2

7. O primeiro, o segundo e o terceiro termos de uma progressão geométrica são também o primeiro, o terceiro e o décimo terceiro termos, respetivamente, de uma progressão aritmética, não constante. O primeiro termo de cada progressão é igual a 2.

Determine uma expressão do termo geral de cada uma das progressões.

8. Seja f a função definida por $f(x)=\pi+\arccos(-x+1)$.

Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

(A) $[-1,1]$ e $[0,\pi]$ **(B)** $[0,2]$ e $[0,\pi]$ **(C)** $[-1,1]$ e $[\pi,2\pi]$ **(D)** $[0,2]$ e $[\pi,2\pi]$

9. Seja (b_n) a sucessão definida por:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = \dfrac{4+b_n}{2}, n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

9.1. Mostre, por indução, que $\forall n\in\mathbb{N}, b_n<4$.

9.2. Deduza da alínea anterior que (b_n) é crescente.

10. Seja (c_n) a sucessão definida por $c_n=\frac{n^2+n+1}{\sum_{k=1}^{n}k}$. O valor de $\lim c_n$ é:

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item						
Cotação (em pontos)						
6.	**7.**	**8.**	**9.1**	**9.2**	**10.**	
8	20	8	18	17	8	**79**

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (A)

Sabemos que $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e que $\cos\alpha < 0$ e que $\operatorname{sen}\alpha < 0$.

$P_{[PQR]} = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP} = 2|\operatorname{sen}\alpha| + \overline{QR} + \overline{QR}$ (pois $\overline{RP} = \overline{QR}$)

$= -2\operatorname{sen}\alpha + 2\overline{QR}$

Pretendemos determinar $\overline{QR}$. Seja Q' a projeção ortogonal de Q sobre o eixo Ox.

$\overline{QR}^2 = \overline{QQ'}^2 + \overline{Q'R}^2 \Leftrightarrow \overline{QR}^2 = |\operatorname{sen}\alpha|^2 + (3 - |\cos\alpha|)^2 \Leftrightarrow \overline{QR}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + (3 + \cos\alpha)^2$

$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = \operatorname{sen}^2\alpha + 9 + 6\cos\alpha + \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = 1 + 9 + 6\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \overline{QR}^2 = 10 + 6\cos\alpha$

$\Leftrightarrow \overline{QR} = \pm\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$

Como $\overline{QR} > 0$, então $\overline{QR} = \sqrt{10 + 6\cos\alpha}$.

Assim, o perímetro do triângulo $[PQR]$ é dado por $-2\operatorname{sen}\alpha + 2\sqrt{10 + 6\cos\alpha}$.

2.

2.1. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen}x} = \frac{\operatorname{sen}^2x - 1 + \cos x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{1 - \cos^2x - 1 + \cos x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x - \cos^2x}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x(1-\cos x)}{\operatorname{sen}x(1-\cos x)} =$

$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} =$

$= \frac{1}{\operatorname{tg}x}$

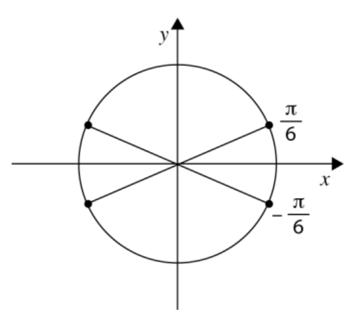
2.2. $f(x) = \operatorname{tg}x \Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}x} = 3\operatorname{tg}x$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \vee \ = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Em $]-\pi, 2\pi[\backslash\{0, \pi\}$ as soluções são:

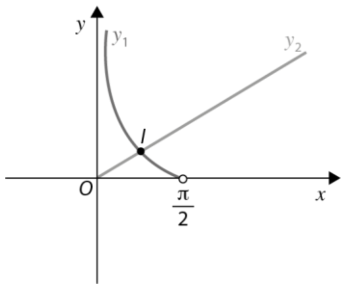
$x = -\frac{5\pi}{6}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}$ e $x = \frac{11\pi}{6}$

2.3. Pretendemos determinar a solução da condição $f(x) = x \ \wedge \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$y_1 = f(x)$

$y_2 = x$



$I(a, b)$

$a \approx 0{,}86$

$b \approx 0{,}86$

A abcissa do ponto P é com a aproximação pedida igual a 0,86.

3. Opção (C)

Seja α a amplitude do ângulo AOB:

$$2\pi \text{ ______ } 6\pi$$

$$\alpha \text{ ______ } 4$$

$$\alpha = \frac{8\pi}{6\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

Assim, a área do setor circular é dada por:

$$A = \frac{3^2 \times \frac{4}{3}}{2} = 6$$

A área da região a sombreado é igual a:

$$A_{[OACB]} - A_{\text{setor circular}} \overset{(1)}{=} 2 \times A_{[OCB]} - 6 =$$

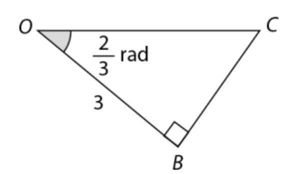
$$= 2 \times \frac{3 \times \overline{BC}}{2} - 6 =$$

$$= 3 \times 3\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) - 6 =$$

$$= 9\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) - 6$$

$$\approx 1{,}08$$

Cálculo auxiliar



$\text{tg}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\overline{BC}}{3} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \times \text{tg}\left(\frac{2}{3}\right)$

(1) Os triângulos $[OCB]$ e $[OAC]$ são geometricamente iguais, pois são ambos triângulos retângulos com a mesma hipotenusa e com um dos catetos iguais.

4.

4.1. $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, pois $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B (por se tratar de um triângulo inscrito numa semicircunferência de diâmetro $[AC]$).

$\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{CD}$, pois $[CD]$ é uma geratriz do cilindro de revolução e $[AB]$ é uma corda de uma base do cilindro. Assim, $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano BCD.

$\overrightarrow{AB} = \left(1+\sqrt{2}, 1, 1\right) - \left(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right)$

Logo, o plano BCD pode ser definido por:

$\sqrt{2}\left(x-1-\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right)(y-1) + \left(1-\sqrt{2}\right)(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{2} - 2 + y - 1 - \sqrt{2}y + \sqrt{2} + z - 1 - \sqrt{2}z + \sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x + \left(1-\sqrt{2}\right)y + \left(1-\sqrt{2}\right)z - 4 + \sqrt{2} = 0$

4.2. Comecemos por definir a reta perpendicular ao plano ABC que passa por B:

$$(x, y, z) = \left(1+\sqrt{2}, 1, 1\right) + k(0, 1, -1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, um ponto genérico da reta referida é:

$$\left(1+\sqrt{2}, 1+k, 1-k\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determinemos a interseção desta reta com o plano suporte da outra base do cilindro:

$(1+k) - (1-k) + 6 = 0 \Leftrightarrow 2k = -6 \Leftrightarrow k = -3$

$I\left(1+\sqrt{2}, -2, 4\right)$ é o ponto de interseção da reta com o plano suporte da outra base do cilindro.

Logo, a altura do cilindro é igual a $\overline{BI}$:

$\overline{BI} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)^2 + (-2-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

5. $u_n = \frac{n+6}{n+4} = \frac{n+4+2}{n+4} = 1 + \frac{2}{n+4}$

Por um lado: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$n + 4 \geq 5$$

$$\frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{n+4} \leq \frac{2}{5}$$

$$1 + \frac{2}{n+4} \leq \frac{7}{5}$$

Por outro lado: $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{n+4} \geq 0$

$$1 + \frac{2}{n+4} \geq 1$$

Logo, $1 \leq u_n \leq \frac{7}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (u_n) é limitada.

Caderno 2

6. Opção (C)

Sejam m_r e m_s os declives, respetivamente, das retas r e s.

$$m_r = \frac{a-2}{-a}$$

$$s: ay + a^2x - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a^2}{a}x + \frac{1}{a} \Leftrightarrow y = -ax + \frac{1}{a}$$

$$m_s = -a$$

As retas r e s são perpendiculares se e só se:

$$m_r \times m_s = -1 \Leftrightarrow \frac{a-2}{-a} \times (-a) = -1$$

$$\Leftrightarrow a - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

7. Sejam u_1, u_2 e u_3 os três primeiros termos da progressão geométrica referida.

Então:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2}$$

Como $u_1 = 2$, vem que $\frac{u_2}{2} = \frac{u_3}{u_2}$ e, consequentemente, $(u_2)^2 = 2u_3$.

Sabemos também que u_2 e u_3 são o terceiro e o décimo terceiro termos, respetivamente, de uma progressão aritmética. Seja r a razão dessa progressão aritmética.

Tem-se que:

$u_2 = 2 + 2r$ (terceiro termo da progressão aritmética)

$u_3 = 2 + 12r$ (décimo terceiro termo da progressão aritmética)

Então, como:

$$(u_2)^2 = 2u_3$$

vem que:

$$(2+2r)^2 = 2(2+12r) \Leftrightarrow 4 + 8r + 4r^2 = 4 + 24r$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 - 16r = 0$$

$$\Leftrightarrow 4r(r-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 4$$

Logo, $u_2 = 2 + 2 \times 4 = 10$.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{10}{2} = 5$$

Concluímos que $u_n = 2 \times 5^{n-1}$ é o termo geral da progressão geométrica e $v_n = 2 + 4(n-1)$ é o termo geral da progressão aritmética.

8. Opção (D)

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq -x+1 \leq 1\} = [0,2]$

$-1 \leq -x+1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -x \leq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

$\forall x \in [0,2], 0 \leq \arccos(-x+1) \leq \pi$

$\forall x \in [0,2], \pi \leq f(x) \leq 2\pi$

Assim, $D'_f = [\pi, 2\pi]$.

9. $P(n): b_n < 4$

9.1. (i) $P(1)$ é verdadeira

$b_1 < 4 \Leftrightarrow 3 < 4$, o que é verdade.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): b_n < 4$ (hipótese de indução)

$P(n+1): b_{n+1} < 4$ (tese de indução)

$b_n < 4 \Leftrightarrow 4 + b_n < 8 \Leftrightarrow \frac{4+b_n}{2} < 4 \Leftrightarrow b_{n+1} < 4$

Por (i) e (ii), pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 4$ é uma proposição verdadeira.

9.2. $b_{n+1} - b_n = \frac{4+b_n}{2} - b_n = 2 - \frac{b_n}{2}$

Pela alínea anterior, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < 4$, logo:

$\forall n \in \mathbb{N}, -b_n > -4$

$\Leftrightarrow \frac{-b_n}{2} > -2$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{b_n}{2} > 0$

Como $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - b_n > 0$, concluímos que (b_n) é crescente.

10. Opção (C)

$$c_n = \frac{n^2+n+1}{1+2+\cdots+n} = \frac{n^2+n+1}{\frac{1+n}{2} \times n} = \frac{n^2+n+1}{\frac{n^2+n}{2}} = \frac{2n^2+2n+2}{n^2+n}$$

$$\lim c_n = \lim \frac{2n^2+2n+2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$$