Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (metas curriculares) – 12.º ano

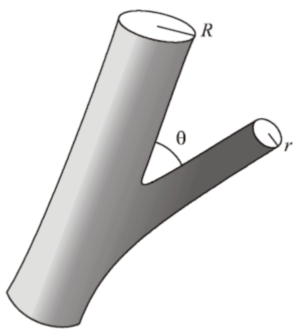
Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 2007)
Tema IV: TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Seja $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=3-2\cos x$. Indique o valor de *x* para o qual *f*(*x*) é máximo.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (B) $\frac{3\pi}{2}$

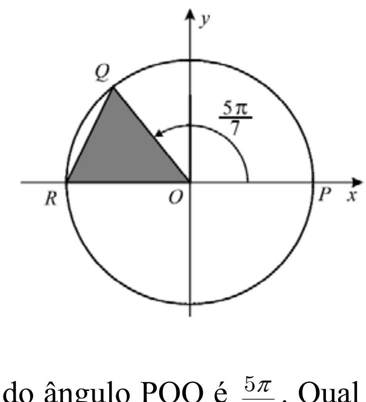
Exame Nacional 2007 (2.ª fase)

2. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r. A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área *a*. Seja $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a=A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R=\sqrt[4]{2}\ r$



Exame Nacional 2007 (2.ª fase)

3. Na figura está representado o círculo trigonométrico. Tal como a figura sugere, *O* é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas (1,0) e R é o ponto de coordenadas (−1,0). A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$. Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?



(A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49

2.º teste intermédio 2008

4. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s.

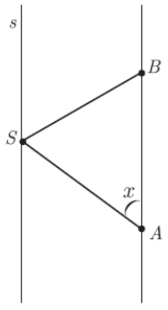
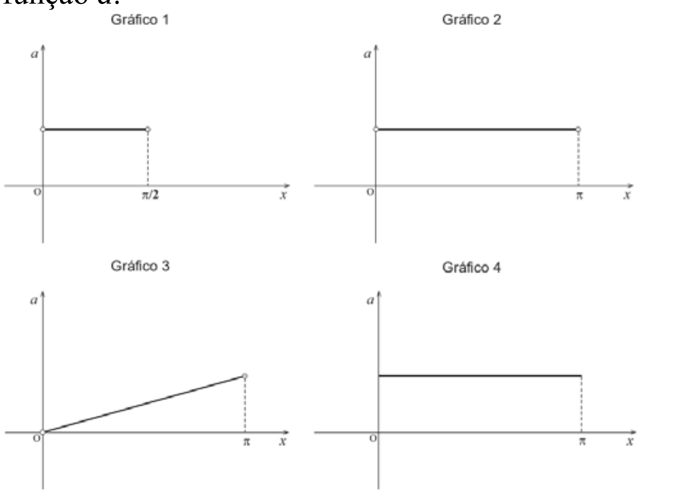


Fig. 4

O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s. Para cada posição do ponto S , seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja *a*(*x*) a área do triângulo [ABS]. Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função *a*. Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função *a*.



Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

5. Considere a função *g*, de domínio ℝ, definida por $g(x)=2+sen(4x)$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Determine $g'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Estude a monotonia da função *g*, no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

6. Seja a função *f*, de domínio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$, definida por $f(x) = \cos(x)$. Qual é o contradomínio de *f* ?

(A) [−1,0] (B) [0, 1] (C) $[0, \frac{1}{2}]$ (D) $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$

Exame Nacional 2008 (época especial)

7. Seja a função *f*, de domínio [0, π], definida por $f(x) = 2sen(x) \cdot \cos(x) + 2$. O gráfico da função *f* intersecta a recta y = 1 num só ponto. Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, as coordenadas desse ponto.

Exame Nacional 2008 (época especial)

8. Na figura 3 estão representados: • uma circunferência de centro *O* e raio 1; • dois pontos, *A* e *B*, sobre a circunferência, tais que [*AB*] é um diâmetro; • uma semi-recta $\dot{O}A$; • um segmento de recta [*PQ*]

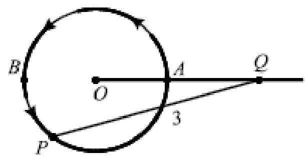


Figura 3

Considere que:

• o ponto *P*, partindo de *A*, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura 3

• o ponto *Q* se desloca sobre a semi-recta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto *P*, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$

Para cada posição do ponto *P*, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$ (ver figura 4).

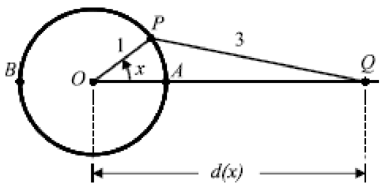


Figura 4

Seja *d* a função que, a cada valor de *x* pertencente a [0,2π], associa a distância, *d*(*x*), do ponto *Q* ao ponto *O*.

a) Considere as seguintes afirmações sobre a função *d* e sobre a sua derivada, *d'* (a função *d* tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2d(\pi)$

II. $\forall x \in [0, 2\pi], d'(x) < 0$

Elabore uma pequena composição na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.

Nota: neste item, não defina analiticamente a função *d*; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de *x*, tem-se que *d*(*x*) é a distância do ponto *Q* ao ponto *O*).

b) Defina analiticamente a função *d* no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de *d*(*x*), para cada *x* pertencente a este intervalo).

Sugestão: trace a altura do triângulo [*OPQ*] relativa ao vértice *P*, designe por *R* o ponto de intersecção desta altura com a semi-recta $\dot{O}A$, e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

3.º teste intermédio 2009

9. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência. Qual das expressões seguintes representa, em função de *x*, a área da parte sombreada?

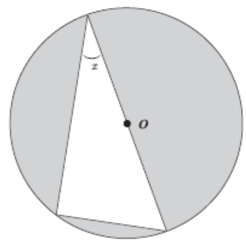


Fig. 1

(A) $\pi - sen(2x)$

(B) $\frac{\pi}{2} - sen(2x)$ (C) $\pi - 2sen(2x)$ (D) $\pi - \frac{sen(2x)}{4}$

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

10. Seja *f* a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = sen(2x)\cos x$.

a) Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa 0.

b) No domínio indicado, determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:

• A é o ponto do gráfico da função *f* cuja ordenada é máxima;

• B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com a recta de equação *y* = 0,3. Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame Nacional 2009 (2.ª fase)

11. Seja a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(2x)$. Qual é o declive da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa ?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame Nacional 2009 (época especial)

12. Na figura 2, está representado um triângulo rectângulo [ABC], cujos catetos, [AB] e [BC], medem 5 unidades. Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto [BC], nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$). Seja *f* a função que, a cada valor de *x*, faz corresponder o perímetro do triângulo [APC]. Resolva os itens a) e b), usando exclusivamente métodos analíticos.

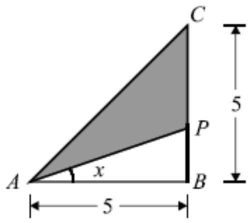


Figura 2

a) Mostre que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5tgx + \sqrt{50} + 5$

b) Seja *r* a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$. Determine o declive da recta *r*

c) Existe um valor de *x* para o qual o perímetro do triângulo [APC] é igual a 16. Determine esse valor, arredondado às centésimas, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

3.º teste intermédio 2010

13. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro [OA];
- o ponto A tem coordenadas (2, 0);
- o vértice O do triângulo [OAB] coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

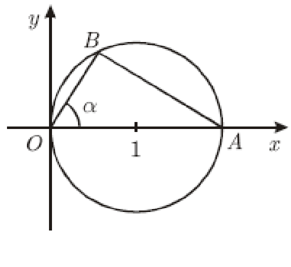


Figura 4

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por $f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + sen\alpha)$

b) Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo [OAB] é máximo.

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

14. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

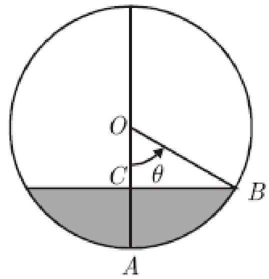


Figura 6

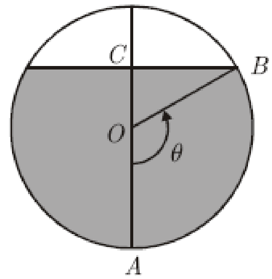


Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por *h*, de domínio [0,π].

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

b) Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

15. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, *t* horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$, em que $t \in [0, 24]$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

b) Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

Exame Nacional 2010 (época especial)

16. Na Figura 3, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1.

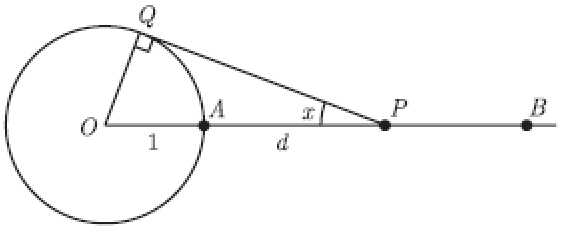


Figura 3

Sabe-se que:
- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O, A, e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B
- o ponto P desloca-se ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A
- *d* é a distância do ponto A ao ponto P
- para cada posição do ponto P, o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a recta PQ é tangente à circunferência;
- *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Seja *f* a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x) = \frac{1 - sen x}{sen x}$. Resolva os dois itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>.

a) Mostre que $d = f(x)$

b) Considere a seguinte afirmação: «Quanto maior é o valor de *x*, menor é o valor de *d*». Averigúe a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função *f* quanto à monotonia.

2.º teste intermédio 2011

17. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} sen^2 (\frac{x}{2}) \right)$?

(A) 4 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

18. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

f (*x*) = 4cos(2*x*). Sabe-se que:

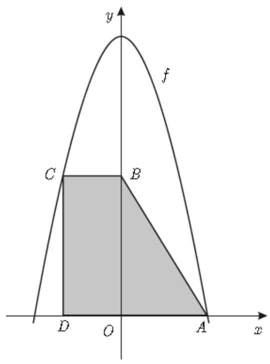


Figura 5

- os vértices A e D do trapézio [ABCD] pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio [ABCD] pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio [ABCD] tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de *f*
- a recta CD é paralela ao eixo Oy

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o valor exacto da área do trapézio [ABCD]

b) Seja f' a primeira derivada da função *f*, e seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que $f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3\cos(2x) + 2sen(2x))$, para qualquer número real *x*

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

19. Na Figura 2, está representado, num referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

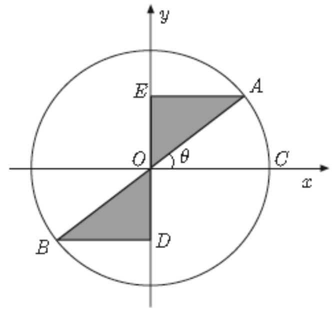


Figura 2

- C é o ponto de coordenadas (1, 0)
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- [AB] é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as rectas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na Figura 2?

(A) 2 (cos θ + senθ) (B) cos θ + sen θ

(C) 2 (1 + cos θ + sen θ) (D) 1 + cos θ + sen θ

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

20. Para *a*, *b* e *n*, números reais positivos, considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a\cos(nx) + bsen(nx)$. Seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real *x*

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

21. Na Figura 2, estão representados, num referencial o. n. xOy, uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:

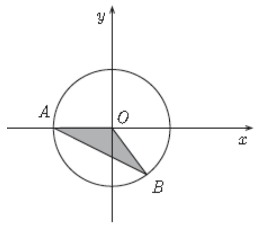


Figura 2

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas (-1, 0)
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a

$\frac{2\pi}{3}$ radianos. Qual é a área do triângulo [OAB]?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\sqrt{3}$

Exame Nacional 2011 (época especial)

22. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

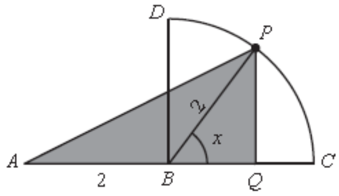


Figura 2

• o segmento de reta [AC] tem comprimento 4
• o ponto B é o ponto médio de [AC]
• o segmento de reta [BD] é perpendicular a [AC]
• o arco de circunferência CD tem centro em B

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta [BC] de tal forma que [PQ] é sempre perpendicular a [BC]. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja *A*(*x*) a área do triângulo [APQ]. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $A(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } (2x)$ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Mostre que existe um valor de *x* para o qual a área do triângulo [APQ] é máxima.

2.º teste intermédio 2012

23. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo [ABCD]

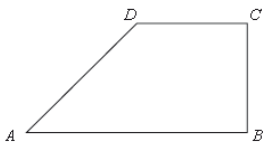


Figura 5

Sabe-se que:

• $\overline{BC} = 1$
• $\overline{CD} = 1$
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
• $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do trapézio [ABCD] é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

b) Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P'(\theta)$. Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{sen^2\alpha}$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

24. Na Figura 4, está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:

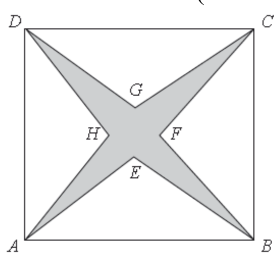


Figura 4

• $\overline{AB} = 4$
• $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
• *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
• $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de *x*, por *a*(*x*) = 16(1 − tg *x*)

b) Mostre que existe um valor de *x* compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

25. Relativamente à Figura 1, sabe-se que:

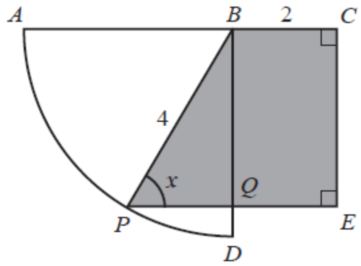


Figura 1

• o ponto B pertence ao segmento de reta [AC]
• os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
• o segmento de reta [BD] é perpendicular ao segmento de reta [AC]
• $\overline{BC} = 2$

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD, nunca coincidindo com A nem com D, e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero [PBCE] seja um trapézio retângulo. O ponto Q é a intersecção do segmento de reta [PE] com o segmento de reta [BD]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo EPB e seja S(x) a área do trapézio [PBCE]

a) Mostre que S(x) = 8sen x + 4sen(2x) ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve apresentar:
• o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
• o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
• os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

2.º teste intermédio 2013

26. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$f(x)=\frac{sen(-x)}{x}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f (x_n)?

(A) −1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

27. Considere a função g, de domínio $]-\frac{\pi}{2},0[$, definida por g(x) = sen(2x) − cos x. Seja *a* um número real do domínio de g. A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa *a* é paralela à reta de equação $y=\frac{x}{2}+1$. Determine o valor de *a*, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

28. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OAB] e a reta r. Sabe-se que:

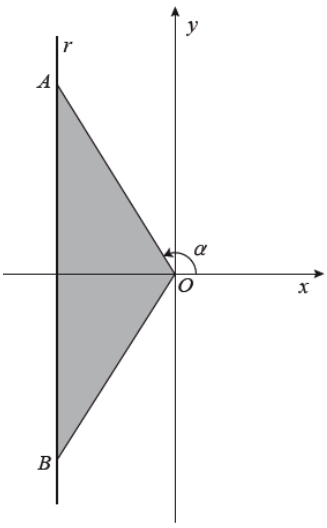


Figura 4

- a reta r é definida por x = −3
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
- a função P, de domínio $]\frac{\pi}{2},\pi[$, é definida por

$P(x)=-6tgx-\frac{6}{\cos x}$

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por P(α)

b) Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

29. Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo [ACE]

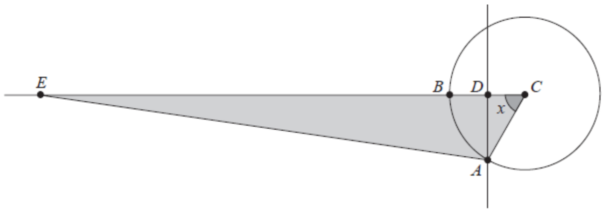


Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE}=6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$

a) Mostre que a área do triângulo [ACE] é dada, em função de x, por $f(x)=3senx+\frac{1}{4}sen(2x)$

b) Mostre, sem resolver a equação, que f(x) = 2 tem, pelo menos, uma solução em $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

30. Seja g a função, de domínio ℝ, definida por

$g(x)=\cos^2(\frac{x}{12})-sen^2(\frac{x}{12})$

Qual das expressões seguintes também define a função g ?

(A) $sen\left(\frac{x}{24}\right)$ **(B)** $\cos\left(\frac{x}{24}\right)$

(C) $sen\left(\frac{x}{6}\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

2.º teste intermédio 2014

31. Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4. Seja α a amplitude, em radianos,

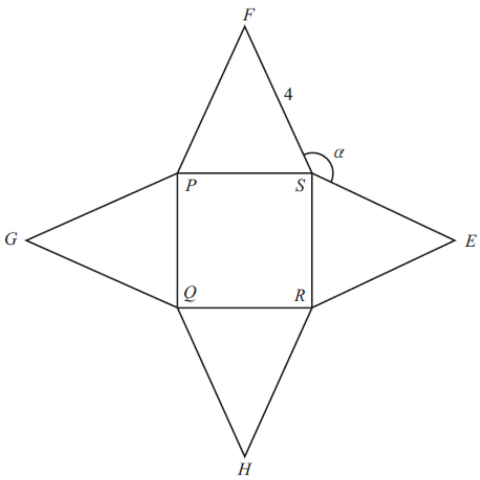


Figura 4

do ângulo FSE ($\alpha\in]\frac{\pi}{2},\pi[$). A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α. Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por −32cos α

Sugestão – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP, que poderá designar por β

2.º teste intermédio 2014

32. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

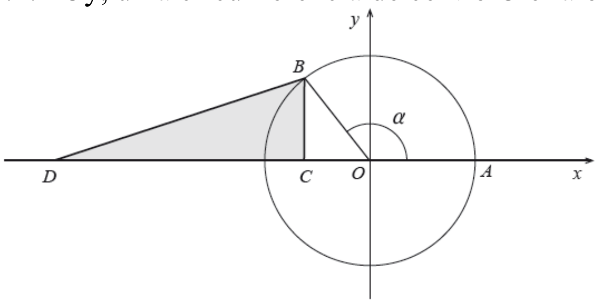


Figura 1

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• o ponto A tem coordenadas (1, 0)
• os pontos B e C têm a mesma abcissa;
• o ponto C tem ordenada zero;
• o ponto D tem coordenadas (−3, 0)
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo [BCD] ?

(A) $\frac{1}{2}(-3-\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

33. Seja f uma função cuja derivada $f\,'$, de domínio ℝ, é dada por $f\,'(x) = x - sen(2x)$

a) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{2x-\pi}$

b) Estude o gráfico da função f , quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

34. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{se } \frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2}\\[2ex] k-3 & \text{se } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

35. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

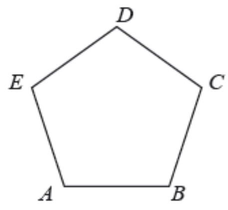


Figura 4

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

36. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S.

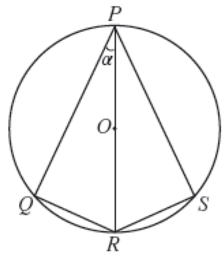


Figura 5

Sabe-se que:

• os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
• [PR] é um diâmetro da circunferência;
• $\overline{PQ} = \overline{PS}$
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
• $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
• A(α) é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α

Para um certo número real θ, com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tem-se que $tg\theta = 2\sqrt{2}$. Determine o valor exato de A(θ), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que A(α) = 16senα cos α

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

37. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r.

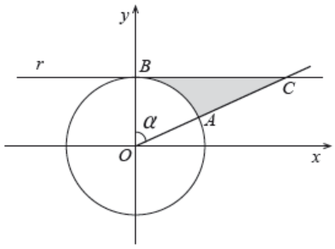


Figura 1

Sabe-se que:

• os pontos A e B pertencem à circunferência;

• o ponto B tem coordenadas (0, 1)

• a reta r é tangente à circunferência no ponto B

• o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen} \alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

38. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;

• o ponto B pertence ao eixo Ox

• o ponto C tem coordenadas (1, 0)

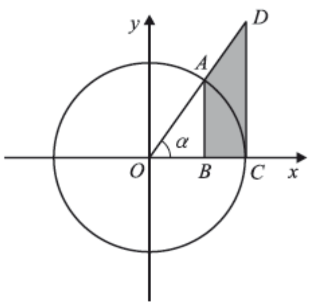


Figura 1

• o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$

• os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero [ABCD], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ **(D)** $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

39. Sejam f e g as funções, de domínio R, definidas, respetivamente, por f(x) = 1 – cos(3x) e g(x) = sen(3x). Seja a um número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Considere as retas r e s tais que:

• a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a

• a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $sen(3a) = -\frac{1}{3}$

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

40. Seja f a função, de domínio R, definida por f (x) =3sen^2 (x). Qual das expressões seguintes define a função f ´´, segunda derivada de f ?

(A) 6sen(2x) cos(x) (B) 6sen(x) cos(2x)

(C) 6 cos(2x) (D) 6sen(2x)

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

41. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola.

A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$

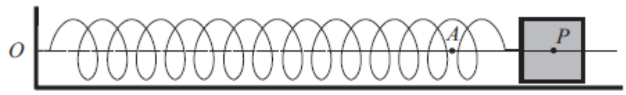


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento. Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por $d(t) = 1 + \frac{1}{2} sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$. A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo (t ∈[0, +∞[). Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A. Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez. Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu. Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

b) Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

42. Seja a um número real. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por f (x) = a sen x. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Determine o valor de a

Exame Nacional 2015 (época especial)

43. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:

• o ponto P tem coordenadas (0,1)

• o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência. Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α?

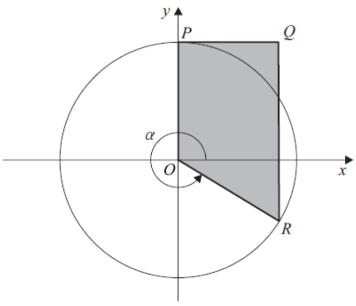


Figura 1

(A) $\frac{\cos\alpha}{2} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\cos\alpha}{2} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

44. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale. Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto. Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\operatorname{sen}(2\pi t)$$

(t é medido em minutos e pertence a [0,1])

a) Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo [0,1]. A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por A=M−m. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em metros.

b) Em [0,1], o conjunto solução da inequação h(t)≤19,5 é um intervalo da forma]a,b[. Determine o valor de b−a arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere y∈[19,21];

–apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;

–apresente o valor de b−a arredondado às centésimas;

– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

45. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1. Sabe-se que:

• os diâmetros [AC] e [BD] são perpendiculares;

• o ponto P pertence ao arco AB

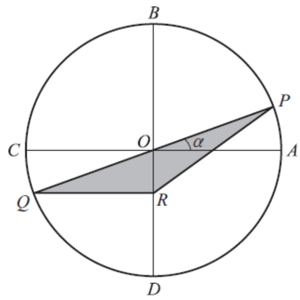


Figura 1

• [PQ] é um diâmetro da circunferência;

• o ponto R pertence a [OD] e é tal que [QR] é paralelo a [AC]

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo [PQR], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

46. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4} & \text{se } x \neq -1 \\ k+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{5}{4}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

Exame Nacional 2016 (época especial)

47. Seja f a função, de domínio A e contradomínio]−1, +∞[, definida por f(x) = tg x. Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

48. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\,\text{sen}\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$. Determine os valores de α, pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1. Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

49. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1.

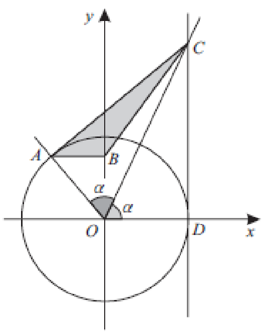


Figura 4

Sabe-se que:

• o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
• o ponto D tem coordenadas (1, 0)
• o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
• o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta [AB] é paralelo ao eixo Ox
• os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Mostre que a área do triângulo [ABC], representado a sombreado, é dada por

$$\frac{\text{tg}\,\alpha\,\cos^2(2\alpha)}{2}$$

Exame Nacional 2017 (época especial)

Soluções:

1. C 2. π/3 3. A 4. 2 5. 4; 1 e 3 6. B 7. (3π/4,1) 8. I Verd.; $d(x)=\cos x+\sqrt{9-\text{sen}^2 x}$ 9. A
10. y=2x; 0,2 11. A 12. −10/3; 0,24 13. π/4 14. π/2 15. 8; 6 16. Verd. 17. D 18. 7π/12
19. C 20. π/3 21. A 23. 3/2 25. π/3 26. A 27. -π/6 28. -12 30. D 32. C
33. π/4; -π/6 e π/6 34. C 36. 32√2/9 37. B 38. B 40. C 41. 2, 2/3 e 8/3 42. −2√3/3 43. D
44. 1; 0,27 45. D 46. B 47. B 48. 13π/12 e 17π/12

O professor: Roberto Oliveira