Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (metas curriculares) – 12.º ano

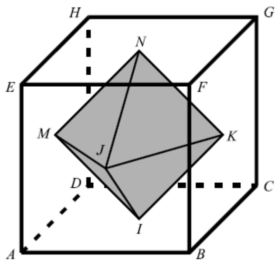
# Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 2008)

# Tema II: PROBABILIDADES

1. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Sabe-se que P(A)=0,5 e que P(B)=0,7. Podemos então garantir que ...
(A) A e B são acontecimentos contrários
(B) A e B são acontecimentos compatíveis
(C) A está contido em B
(D) o acontecimento $A \cup B$ é certo

Teste intermédio 1 (2008/09)

2. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo [ABCDEFGH] e o octaedro [IJKLMN] (o vértice L do octaedro não está visível). Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo.




a) Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, {A,B,C,K,L}).

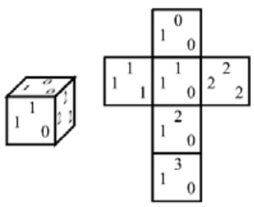
$a_1$) Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

$a_2$) Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

b) Escolhem-se ao acaso cinco dos catorze vértices dos dois poliedros. Qual é a probabilidade de os cinco vértices escolhidos pertencerem todos à mesma face do cubo? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Teste intermédio 1 (2008/09)

3. Na figura está representado um dado equilibrado, bem como a respectiva planificação.



Conforme se pode observar na figura, existem três números em cada face. Lança-se este dado uma só vez e observam-se os números da face que fica voltada para cima. Diz-se então que saíram esses três números. Seja R o acontecimento «*os números saídos são todos iguais*». Seja S o acontecimento «*a soma dos números saídos é igual a 3*». Os acontecimentos V e W são independentes? Justifique.

Teste intermédio 1 (2008/09)

4. a) Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos de probabilidade não nula. Considere que $\overline{B}$ designa o acontecimento contrário de B e que P(A|B) e P(B|A) designam probabilidades condicionadas. Mostre que

$P(A \mid B) - P(\overline{B}) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A)$

b) Relativamente a uma turma do 12.º ano, sabe-se que:
- 60% dos alunos da turma praticam desporto;
- 40% dos alunos da turma são raparigas;
- metade dos praticantes de desporto são raparigas.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma, qual é a probabilidade de ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga? Apresente o resultado na forma de percentagem.

Nota: Se desejar, pode utilizar a fórmula da alínea anterior na resolução deste problema. Nesse caso, comece por explicitar o significado dos acontecimentos A e B, no contexto do problema. Também pode resolver o problema através de um diagrama, de uma tabela, ou utilizando qualquer outro processo.

Teste intermédio 1 (2008/09)

5. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

a) Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco. Sejam A e B os acontecimentos:
A: «o número da primeira bola retirada é par»
B: «o número da segunda bola retirada é par»
Indique o valor de $P(B \mid \overline{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B \mid \overline{A})$ no contexto da situação descrita.

b) Considere novamente o saco com a sua constituição inicial. Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Teste intermédio 2 (2008/09)

6. Uma certa linha do Triângulo de Pascal tem exactamente oito elementos. Escolhem-se ao acaso

dois desses oito elementos. Qual é a probabilidade de escolher dois números cujo produto seja igual a 7?

(A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

Teste intermédio 2 (2008/09)

7. De um baralho com 40 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus), em que cada naipe contém um Ás, uma Dama, um Valete, um Rei e seis cartas (do Dois ao Sete), foram dadas sucessivamente, ao acaso, seis cartas a um jogador, que as coloca na mão, pela ordem que as recebe. Qual é a probabilidade de o jogador obter a sequência 2 – 4 – 6 – 7 – Dama – Rei , nas cartas recebidas?

(A) $\frac{4^6}{{}^{40}A_6}$ (B) $\frac{4^6}{{}^{40}C_6}$ (C) $\frac{1}{{}^{40}A_6}$ (D) $\frac{1}{{}^{40}C_6}$

Exame nacional de 2009 (1.ª fase)

8. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos
($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

• P(A) = 0,3
• P(B ) = 0,4
• $P(A \cup B) = 0,5$

Qual é a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza?

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame nacional de 2009 (1.ª fase)

9. Uma caixa contém bolas, indistinguíveis ao tacto, numeradas de 1 a 20. As bolas numeradas de 1 a 10 têm cor verde, e as bolas numeradas de 11 a 20 têm cor amarela. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente, duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola retirada, e em registar a cor das bolas retiradas.

a) Determine a probabilidade de as duas bolas retiradas da caixa terem cores diferentes. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Na mesma experiência aleatória, considere os acontecimentos:

A: «A 1.ª bola retirada é verde.»
B: «A 2.ª bola retirada é amarela.»
C: «O número da 2.ª bola retirada é par.»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P((B \cap C) \mid A)$? A resposta correcta a esta questão é $P((B \cap C) \mid A) = \frac{5}{19}$.

Numa pequena composição, <u>sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada</u>, explique o valor dado, começando por interpretar o significado de $P((B \cap C) \mid A)$, no contexto da situação descrita e fazendo referência:

• à Regra de Laplace;
• ao número de casos possíveis;
• ao número de casos favoráveis.

Exame nacional de 2009 (1.ª fase)

10. A Maria gravou nove CD, sete com música *rock* e dois com música popular, mas esqueceu-se de identificar cada um deles. Qual é a probabilidade de, ao escolher dois CD ao acaso, um ser de música *rock* e o outro ser de música popular?

(A) $\frac{7}{36}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{7}{18}$

Exame nacional de 2009 (2.ª fase)

11. Admita que um estudante tem de realizar dois testes no mesmo dia. A probabilidade de ter classificação positiva no primeiro teste é 0,7, a de ter classificação positiva no segundo teste é 0,8 e a de ter classificação negativa em ambos os testes é 0,1. Qual é a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame nacional de 2009 (2.ª fase)

12. Uma certa linha do Triângulo de Pascal é constituída por todos os elementos da forma ${}^{14}C_p$. Escolhido, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser o número 14?

(A) $\frac{1}{15}$ (B) $\frac{1}{14}$ (C) $\frac{2}{15}$ (D) $\frac{4}{15}$

Exame nacional de 2009 (2.ª fase)

13. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$ . Mostre que

$1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$

Exame nacional de 2009 (2.ª fase)

14. Considere um baralho com 52 cartas, repartidas por quatro naipes (Copas, Ouros, Espadas e Paus). Em cada naipe, há um Ás, três figuras (uma Dama, um Valete, um Rei) e mais nove cartas (do Dois ao Dez).

a) Retiram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas. Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases, e as restantes sejam figuras?

b) Admita que, num jogo, cada jogador recebe três cartas, por qualquer ordem. Qual é a probabilidade de um determinado jogador receber exactamente dois ases? Uma resposta correcta a esta questão é $\frac{{}^{4}C_{2}\times 48}{{}^{52}C_{3}}$.

Numa pequena composição, justifique esta resposta, fazendo referência:

- à Regra de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

Exame nacional de 2009 (2.ª fase)

15. Duas crianças escrevem, em segredo e cada uma em seu papel, uma letra da palavra VERÃO. Qual é a probabilidade de as duas crianças escreverem a mesma letra?

(A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{2}{25}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

Exame nacional de 2009 (fase especial)

16. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Mostre que

$P(B)+P(\overline{A})+P(\overline{A}\cup\overline{B})=2P(\overline{A})+P(A\cup B)$

Exame nacional de 2009 (fase especial)

17. Na figura 1 estão representados oito cartões, numerados de 1 a 8.

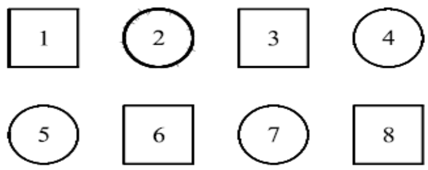



Figura 1

Escolhe-se, ao acaso, um destes oito cartões e observa-se a sua forma e o número nele inscrito. Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:

*A*: «O número do cartão escolhido é maior do que $\sqrt{30}$»

*B*: «O cartão escolhido é um círculo»

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A\mid B)$?

$\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

Teste intermédio 1 (2009/10)

18. Na figura 2 está representado um prisma pentagonal regular. Quatro dos vértices desse prisma estão designados pelas letras A, B, E e O.

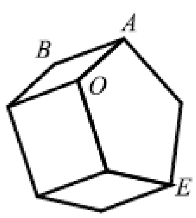



Figura 2

a) Pretende-se designar os restantes seis vértices do prisma, utilizando letras do alfabeto português (23 letras). De quantas maneiras diferentes podemos designar esses seis vértices, de tal modo que os cinco vértices de uma das bases sejam designados pelas cinco vogais?

Nota: não se pode utilizar a mesma letra para designar vértices diferentes.

b) Ao escolhermos três vértices do prisma, pode acontecer que eles pertençam todos a uma mesma face. Por exemplo, os vértices A, B e O pertencem todos a uma mesma face, o mesmo acontecendo com os vértices A, E e O. Escolhem-se aleatoriamente três dos dez vértices do prisma. Qual é a probabilidade de esses três vértices pertencerem todos a uma mesma face? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) Escolhe-se aleatoriamente um vértice em cada base do prisma. Qual é a probabilidade de o segmento de recta definido por esses dois vértices ser diagonal de uma face? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Teste intermédio 1 (2009/10)

19. a) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) > 0$. Prove que $P(A)\times[P(B\mid A)-1]+P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})$

b) Num encontro desportivo, participam atletas de vários países, entre os quais Portugal. Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino. Escolhido ao acaso um atleta participante no encontro, a probabilidade de ele ser estrangeiro ou do sexo masculino é 90%. Participam no encontro duzentos atletas. Quantos são os atletas portugueses?

Nota: se desejar, pode utilizar a igualdade do item a) na resolução deste problema; nesse caso, comece por explicitar os acontecimentos *A* e *B*, no contexto do problema.

Teste intermédio 1 (2009/10)

20. Um saco contém bolas azuis e bolas verdes, indistinguíveis ao tacto. Redija, no contexto desta situação, o enunciado de um problema de cálculo de probabilidade, inventado por si, que admita como resposta correcta

$\frac{{}^{7}C_{4}\times 3+{}^{7}C_{5}}{{}^{10}C_{5}}$. No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de bolas existentes no saco;
- o número de bolas de cada cor existentes no saco;
- a experiência aleatória;
- o acontecimento cuja probabilidade pretende que seja calculada (e cujo valor terá de ser dado pela expressão apresentada).

Teste intermédio 1 (2009/10)

21. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• *A* e *B* são acontecimentos independentes;
• $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$
Qual é o valor de $P(A \cup B)$?
(A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,8

Teste intermédio 2 (2009/10)

22. Uma caixa tem seis bolas: três bolas com o número 0 (zero), duas bolas com o número 1 (um) e uma bola com o número 2 (dois). Tiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa e observam-se os respectivos números.
a) Sejam *A* e *B* os acontecimentos:
*A* : «os números saídos são iguais»
*B*: «a soma dos números saídos é igual a 1»
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$? Justifique a sua resposta.

Teste intermédio 2 (2009/10)

23. Um teste é constituído por oito perguntas de escolha múltipla. A sequência das oito respostas correctas às oito perguntas desse teste é AABDADAA. O Pedro, que não se preparou para o teste, respondeu ao acaso às oito perguntas. Qual é a probabilidade de o Pedro ter respondido correctamente a todas as perguntas, sabendo que escolheu cinco opções A, uma opção B e duas opções D?
(A) $\frac{1}{56}$ (B) $\frac{1}{112}$ (C) $\frac{1}{168}$ (D) $\frac{1}{224}$

Teste intermédio 3 (2009/10)

24. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• P(A) = 30% ;
• $P(A \cup B)$ = 70% ;
• A e B são incompatíveis.
Qual é o valor de P(B)?
(A) 21% (B) 40% (C) 60% (D) 61%

Exame nacional de 2010 (1.ª fase)

25. Num grupo de dez trabalhadores de uma fábrica, vão ser escolhidos três, ao acaso, para frequentarem uma acção de formação. Nesse grupo de dez trabalhadores, há três amigos, o João, o António e o Manuel, que gostariam de frequentar essa acção. Qual é a probabilidade de serem escolhidos, exactamente, os três amigos?
(A) $\frac{1}{^{10}A_3}$ (B) $\frac{3}{^{10}A_3}$ (C) $\frac{1}{^{10}C_3}$ (D) $\frac{3}{^{10}C_3}$

Exame nacional de 2010 (1.ª fase)

26. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:
• a quinta parte dos alunos tem computador portátil;
• metade dos alunos não sabe o nome do director;
• a terça parte dos alunos que não sabe o nome do director tem computador portátil.
a) Determine a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do director. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.
b) Admita que essa escola tem 150 alunos. Pretende-se formar uma comissão de seis alunos para organizar a viagem de finalistas. Determine de quantas maneiras diferentes se pode formar uma comissão com, exactamente, quatro dos alunos que têm computador portátil.

Exame nacional de 2010 (1.ª fase)

27. Considere o problema seguinte: «Num saco, estão dezoito bolas, de duas cores diferentes, de igual tamanho e textura, indistinguíveis ao tacto. Das dezoito bolas do saco, doze bolas são azuis, e seis bolas são vermelhas. Se tirarmos duas bolas do saco, simultaneamente, ao acaso, qual é a probabilidade de elas formarem um par da mesma cor?» Uma resposta correcta para este problema é $\frac{12\times11+6\times5}{18\times17}$
Numa composição, explique porquê.
A sua composição deve incluir:
• uma referência à regra de Laplace;
• uma explicação do número de casos possíveis;
• uma explicação do número de casos favoráveis.

Exame nacional de 2010 (1.ª fase)

28. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo. Sabe-se que:
• o número de bolas azuis é 8
• extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a ½ .
Quantas bolas roxas há na caixa?
(A) 16 (B) 12 (C) 8 (D) 4

Exame nacional de 2010 (2.ª fase)

29. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal: 1 15 105 ... 105 15 1
São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha. Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?
(A) 1 (B) $\frac{1}{60}$ (C) $\frac{1}{120}$ (D) 0

Exame nacional de 2010 (2.ª fase)

30. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B .

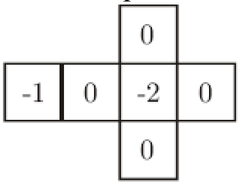



Figura 4

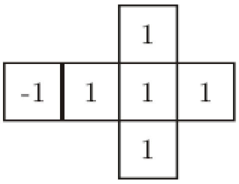



Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados. Considere que o número da face voltada para cima no dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q. Considere agora os acontecimentos:

J : «o número saído no dado A é negativo»;

L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».

Indique o valor de P(L | J ), sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Apresente o resultado na forma de fracção. Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de P(L | J ) no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2010 (2.ª fase)

31. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam $A$ e $B$ dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

Mostre que $\frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A} \mid B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

Exame nacional de 2010 (2.ª fase)

32. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) . Sabe-se que:

• $P(A) = 0,4$

• $P(\bar{B}) = 0,3$

• $P(A \cap B) = 0,3$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) 0,4 (B) 0,6 (C) 0,7 (D) 0,8

Exame nacional de 2010 (fase especial)

33. Uma turma é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes. A Maria e o Manuel são alunos dessa turma. A professora de Português vai escolher, ao acaso, um grupo de cinco alunos para definirem as regras de um Jogo de Palavras.

a) Determine quantos grupos diferentes se podem formar, sabendo que em cada grupo tem de estar, pelo menos, um aluno de cada sexo.

b) Considere os acontecimentos:

A: «a Maria e o Manuel são escolhidos para definirem as regras do jogo»;

B: «dos cinco alunos escolhidos, dois são rapazes e três são raparigas».

Uma resposta correcta para a probabilidade condicionada

P(B |A) é $\frac{16 \times {}^{9}C_2}{{}^{25}C_3}$

Numa composição, explique porquê. A sua composição deve incluir:

• a interpretação do significado de P(B |A), no contexto da situação descrita;

• uma referência à regra de Laplace;

• uma explicação do número de casos possíveis;

• uma explicação do número de casos favoráveis.

Exame nacional de 2010 (fase especial)

34. A Ana e a Joana são amigas e vão acampar nas férias do Carnaval. A mãe da Ana e a mãe da Joana pediram às filhas que, quando chegassem ao acampamento, lhes telefonassem, pedido que é hábito fazerem sempre que as jovens se ausentam de casa por períodos de tempo alargados. Admita-se que o facto de uma delas telefonar é independente de a outra também o fazer. Sabe-se pela experiência que elas nem sempre satisfazem o pedido das mães. Considere os acontecimentos:

A: «a Ana telefona à mãe»;

B: «a Joana telefona à mãe».

Determine a probabilidade de, pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, sabendo que P(A) = 70% , que P(B) = 80% e que A e B são acontecimentos independentes. Apresente o resultado em percentagem.

Exame nacional de 2010 (fase especial)

35. Os vinte e cinco alunos de uma turma do 12.º ano distribuem-se, por idade e sexo, de acordo com a tabela seguinte.

| | 17 anos | 18 anos |
|---|---|---|
| Rapazes | 8 | 2 |
| Raparigas | 11 | 4 |

Escolhe-se, ao acaso, um dos vinte e cinco alunos da turma.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «O aluno escolhido é do sexo masculino»

B: «O aluno escolhido tem 18 anos»

Qual é o valor da probabilidade condicionada P(B|A)?

(A) $\frac{2}{25}$ (B) $\frac{14}{25}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{5}$

Teste intermédio 1 (2010/11)

36. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos. Sabe-se que:

• P(B) = 0,3

• P(A|B)= 0,2
• P( $\bar{A}$ | $\bar{B}$ )= 0,4
Determine P(B|A). Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Teste intermédio 1 (2010/11)

37. Um saco contém dezasseis bolas, numeradas de 1 a 16.
Retiram-se, simultaneamente e ao acaso, duas dessas dezasseis bolas e adicionam-se os respectivos números.
Qual é a probabilidade de a soma obtida ser igual a 7?
(A) $\frac{1}{35}$ (B) $\frac{1}{40}$ (C) $\frac{1}{45}$ (D) $\frac{1}{50}$

Teste intermédio 2 (2010/11)

38. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos, ambos com probabilidade diferente de zero. Prove que
$P(A \cup B) < P(A \mid B) \times P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(A) + P(B) < P(A \mid B)$

Teste intermédio 2 (2010/11)

39. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω) independentes, com P(A) ≠ 0. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) P(A)+P(B) = 1 (B) P(A∪B)=P(A)+P(B)
(C) P(A)≠ P(B) (D) P(B |A)=P(B)

Exame nacional de 2011 (1.ª fase)

40. Uma companhia aérea vende bilhetes a baixo custo exclusivamente para viagens cujos destinos sejam Berlim ou Paris. A companhia aérea constatou que, quando o destino é Berlim, 5% dos seus passageiros perdem o voo e que, quando o destino é Paris, 92% dos passageiros seguem viagem. Sabe-se que 30% dos bilhetes a baixo custo que a companhia aérea vende têm por destino Berlim. Determine a probabilidade de um passageiro, que comprou um bilhete a baixo custo nessa companhia aérea, perder o voo. Apresente o resultado na forma de dízima.

Exame nacional de 2011 (1.ª fase)

41. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω) , com P(A) ≠ 0. Mostre que
$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{1-P(B)}{P(A)}$

Exame nacional de 2011 (1.ª fase)

42. Os medicamentos produzidos num laboratório são embalados em caixas de igual aspecto exterior e indistinguíveis ao tacto. Um lote contém dez caixas de um medicamento X e vinte caixas de um medicamento Y. Desse lote, retiram-se, ao acaso, simultaneamente, quatro caixas para controlo de qualidade. Qual é a probabilidade de as caixas retiradas serem todas do medicamento Y?
(A) $\frac{^{10}C_4}{^{30}C_4}$ (B) $\frac{^{20}C_4}{^{30}C_4}$ (C) $\frac{4}{^{30}C_4}$ (D) $(\frac{2}{3})^4$

Exame nacional de 2011 (2.ª fase)

43. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira. Dos funcionários da MatFinance, sabe-se que:
• 60% são licenciados;
• dos que são licenciados, 80% têm idade inferior a 40 anos;
• dos que não são licenciados, 10% têm idade inferior a 40 anos.
Determine a probabilidade de um desses funcionários, escolhido ao acaso, ser licenciado, sabendo que tem idade não inferior a 40 anos. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Exame nacional de 2011 (2.ª fase)

44. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω). Sabe-se que:
• P( $\bar{A}$ )= 0,9
• P(A∪ B)= 0,73
• A e B são acontecimentos independentes
Qual é o valor de P(B)?
(A) 0,63 (B) 0,657 (C) 0,073 (D) 0,7

Exame nacional de 2011 (1.ª fase especial)

45. Uma turma do 12.º ano de uma escola secundária tem 18 raparigas e 10 rapazes. Nessa turma, 20 alunos têm Inglês. Dos alunos da turma que têm Inglês só 4 são rapazes. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma. Qual é a probabilidade de o aluno escolhido não ter Inglês, sabendo que é rapariga?
(A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{4}$

Exame nacional de 2011 (1.ª fase especial)

46. Na Figura 3, está representado um tetraedro com as faces numeradas de 1 a 4.
a) O João tem um catálogo de tintas com 12 cores diferentes, uma das quais é a sua preferida.

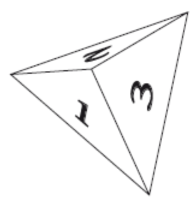


Figura 3

O João selecciona, ao acaso, 4 cores diferentes para pintar as quatro faces do tetraedro. Cada uma das faces é pintada com uma única cor. Determine a probabilidade de o tetraedro ter uma das faces pintadas com a cor preferida do João. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Considere, agora, a experiência aleatória que consiste em lançar 4 vezes o tetraedro representado na Figura 3 e registar, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo. Sejam I e J os acontecimentos seguintes.

I : «o número registado nos três primeiros lançamentos do tetraedro é o número 2»;

J : «a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro é menor do que 10».

Indique o valor de $P(J|I)$ sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(J|I)$ no contexto da situação descrita.

Exame nacional de 2011 (1.ª fase especial)

47. Num determinado clube desportivo praticam-se apenas dois desportos, futebol e andebol. Dos jovens inscritos nesse clube, 28 jogam apenas futebol, 12 jogam apenas andebol e 12 jogam futebol e andebol. Escolhe-se, ao acaso, um dos jovens inscritos.
Qual é a probabilidade de o jovem escolhido jogar andebol sabendo que joga futebol?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{7}{10}$ (D) $\frac{3}{7}$

Exame nacional de 2011 (especial normal)

48. Lança-se cinco vezes consecutivas um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista-se, em cada lançamento, o número inscrito na face voltada para cima. Considere os acontecimentos seguintes.

I: «sair face ímpar em exactamente dois dos cinco lançamentos»;

J: «sair face 4 em exactamente dois dos cinco lançamentos».

Qual dos acontecimentos seguintes é mais provável?

(A) acontecimento I (B) acontecimento I

(C) acontecimento J (D) acontecimento J

Exame nacional de 2011 (especial normal)

49. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$) incompatíveis. Sabe-se que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}3$ e que $P(A) = 0{,}5$. Qual é o valor de $P(B)$?

(A) 0,2 (B) 0 (C) 0,5 (D) 0,4

Exame nacional de 2011 (especial normal)

50. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(B) \neq 0$. Mostre que

$$P(\overline{A \cap B} \mid B) = P(\bar{A} \mid B)$$

Exame nacional de 2011 (especial normal)

51. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos incompatíveis ($A \subset \Omega$ e $\subset \Omega$). Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $P(A \cup B) = P(A \cap B)$ (B) $P(A) + P(B) = 1$

(C) $P(A \cap B) = 0$ (D) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Teste intermédio 1 (2011/12)

52. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos em todos os anos de escolaridade. Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «O aluno é do sexo feminino»

B: «O aluno está no 12.º ano»

Qual das expressões seguintes designa o acontecimento «o aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano»?

(A) $A \cap B$ (B) $\overline{A \cap B}$ (C) $A \cup B$ (D) $\overline{A \cup B}$

Teste intermédio 2 (2011/12)

53. Uma caixa, que designaremos por caixa 1, tem uma bola branca e duas bolas pretas. Outra caixa, que designaremos por caixa 2, tem três bolas brancas e quatro bolas pretas. Realiza-se a seguinte experiência: ao acaso, tiram-se duas bolas da caixa 1 e colocam-se na caixa 2; em seguida, tiram-se simultaneamente duas bolas da caixa 2. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «As bolas retiradas da caixa 1 são da mesma cor»

B: «As bolas retiradas da caixa 2 são da mesma cor»

Determine o valor de $P(\bar{B} \mid A)$, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada. Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:

- o significado de $P(\bar{B} \mid A)$, no contexto da situação descrita;
- a explicação do conteúdo da caixa 2 após a realização do acontecimento A
- a explicação do número de casos possíveis;
- a explicação do número de casos favoráveis;
- a apresentação do valor da probabilidade pedida.

Teste intermédio 2 (2011/12)

54. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω). Sabe-se que:
• A e B são acontecimentos independentes;
• $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$
• $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$
Qual é o valor de $P(B)$?
(A) $\frac{5}{14}$ (B) $\frac{9}{14}$ (C) $\frac{9}{20}$ (D) $\frac{11}{20}$
Exame nacional de 2012 (1.ª fase)

55. Para assistirem a um espetáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares.
Qual é a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro?
(A) $\frac{2\times5!}{7!}$ (B) $\frac{5!}{7!}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$
Exame nacional de 2012 (1.ª fase)

56. Numa escola, realizou-se um estudo sobre os hábitos alimentares dos alunos. No âmbito desse estudo, analisou-se o peso de todos os alunos. Sabe-se que:
• 55% dos alunos são raparigas;
• 30% das raparigas têm excesso de peso;
• 40% dos rapazes não têm excesso de peso.
a) Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola. Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Considere agora que a escola onde o estudo foi realizado tem 200 alunos. Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos para representarem a escola num concurso. Determine a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.
Exame nacional de 2012 (1.ª fase)

57. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é 111. Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha. Qual é a probabilidade de esse elemento ser maior do que $10^5$ ?
(A) $\frac{3}{56}$ (B) $\frac{53}{56}$ (C) $\frac{2}{37}$ (D) $\frac{35}{37}$
Exame nacional de 2012 (2.ª fase)

58. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω), com P(B) ≠ 0. Mostre que
$$P(\overline{A \cap B} \mid B) + P(A \mid B) = 1$$
Exame nacional de 2012 (2.ª fase)

59. Considere um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um saco que contém cinco bolas, indistinguíveis ao tato, cada uma delas numerada com um número diferente: 0, 1, 2, 3 e 4. Lança-se o dado uma vez e retira-se, ao acaso, uma bola do saco, registando-se os números que saíram.
Qual é a probabilidade de o produto desses números ser igual a zero?
(A) 0 (B) $\frac{1}{15}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{5}$
Exame nacional de 2012 (fase especial)

60. Considere uma empresa em que:
• 80% dos funcionários apostam no euromilhões;
• dos funcionários que apostam no euromilhões, 25% apostam no totoloto;
• 5% dos funcionários não apostam no euromilhões nem no totoloto.
Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto.
Exame nacional de 2012 (fase especial)

61. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e ⊂Ω). Mostre que, se A e B são dois acontecimentos independentes, então
$$P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A}) \times (1 - P(B)) = P(\overline{A})$$
Exame nacional de 2012 (fase especial)

62. Relativamente a uma turma de 12.º ano, sabe-se que:
• o número de rapazes é igual ao número de raparigas;
• ¾ dos alunos pretendem frequentar um curso da área de saúde e os restantes alunos pretendem frequentar um curso da área de engenharia;
• dos alunos que pretendem frequentar um curso da área de engenharia, dois em cada sete são raparigas.
a) Escolhe-se, ao acaso, uma rapariga da turma. Qual é a probabilidade de essa rapariga pretender frequentar um curso da área de saúde? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Escolhem-se, ao acaso, dois alunos da turma para estarem presentes nas comemorações do aniversário da escola. Sabe-se que a probabilidade de esses dois alunos serem rapazes é $\frac{13}{54}$. Seja n o número de rapazes da turma.
Determine o valor de n. Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:
• equacione o problema;
• resolva a equação, sem utilizar a calculadora.
Teste intermédio 1 (2012/13)

63. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω). Sabe-se que:
• P(A) = 0,3
• P( $\bar{B}$ ) = 0,6
• P( $\bar{A} \cap \bar{B}$ ) = 0,4
Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

Teste intermédio 1 (2012/13)

64. Um saco contém quatro bolas com o número 0, uma bola com o número 2 e duas bolas com o número 3. Considere agora a experiência que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas do saco. Sejam A e B os acontecimentos seguintes.
A: «Não saem bolas com o número 0 em extrações consecutivas»
B: «A segunda bola retirada tem o número 2»
Determine P(B|A), sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.
Numa pequena composição, justifique a sua resposta. A sua composição deve contemplar:
• o significado de P(B|A), no contexto da situação descrita;
• a explicação da ordem de saída das bolas com o número 0
• a explicação do número de casos possíveis;
• a explicação do número de casos favoráveis;
• a apresentação do valor da probabilidade na forma de fração.

Teste intermédio 2 (2012/13)

65. Uma caixa contém apenas bolas brancas e bolas pretas, indistinguíveis ao tato. Todas as bolas estão numeradas com um único número natural. Sabe-se que:
• duas bolas em cada cinco são pretas;
• 20% das bolas pretas têm um número par;
• 40% das bolas brancas têm um número ímpar.
a) Retira-se, ao acaso, uma bola dessa caixa. Determine a probabilidade de essa bola ser preta, sabendo que tem um número par. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
b) Admita agora que a caixa tem n bolas. Extraem-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.
Determine n, sabendo que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$

Exame nacional de 2013 (1.ª fase)

66. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω). Sabe-se que:
• $P(B) = \frac{1}{4}$
• $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{15}{16}$
• $P(A \mid \bar{B}) = \frac{7}{12}$
Determine P(A).

Exame nacional de 2013 (1.ª fase)

67. Considere a linha do triângulo de Pascal em que o produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento é 484. Qual é a probabilidade de escolher, ao acaso, um elemento dessa linha que seja superior a 1000 ?
(A) $\frac{15}{23}$ (B) $\frac{6}{11}$ 6 (C) $\frac{17}{23}$ (D) $\frac{8}{11}$

Exame nacional de 2013 (2.ª fase)

68. Na Figura 3, está representado um dado cúbico, não equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 3, em que faces opostas têm o mesmo número. Lança-se o dado uma única vez e observa-se o número da face voltada para cima.
Sejam A e B os acontecimentos seguintes.
A: «sair número ímpar»
B: «sair número menor do que 3»
Sabe-se que:
• $P(\bar{A} \cup \bar{B}) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$
• $P(B \mid A) = \frac{2}{7}$
Determine a probabilidade de sair o número 3

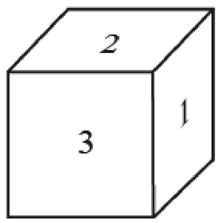


Figura 3

Exame nacional de 2013 (2.ª fase)

69. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos (A⊂Ω e B⊂Ω). Sabe-se que:
• P(A) = 0,3
• $P(\bar{A} \cap B) = 0,55$
• A e B são acontecimentos incompatíveis.
Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ?
(A) 0,85 (B) 0,25 (C) 0,15 (D) 0

Exame nacional de 2013 (fase especial)

70. Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz). As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas. Sabe-se que:
• 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
• das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
• das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Exame nacional de 2013 (fase especial)

71. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$. Qual é o valor de $P(\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}))$?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

Teste intermédio 1 (2013/14)

72. Numa caixa, estão cinco bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 5.

a) De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra?

b) Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso e em simultâneo três bolas da caixa e observar os seus números. Sejam X e Y as variáveis aleatórias seguintes.

X : «número de bolas retiradas com número ímpar»

Y : «soma dos números das bolas retiradas»

Determine $P(Y < 10| X = 1)$, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada. A sua resposta deve incluir:

• o significado de $P(Y < 10 \mid X = 1)$, no contexto da situação descrita;

• a apresentação dos casos possíveis que considerou;

• a apresentação dos casos favoráveis;

• o valor da probabilidade pedida.

Teste intermédio 1 (2013/14)

73. O João tem uma coleção de dados, uns com a forma de um cubo (dados cúbicos) e os outros com a forma de um octaedro (dados octaédricos).

a) Os dados cúbicos são equilibrados e têm as faces numeradas de 1 a 6. O João lança oito vezes um dos dados cúbicos. Qual é a probabilidade de a face com o número 1 sair pelo menos duas vezes? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) Alguns dados da coleção do João são verdes e os restantes são amarelos. Sabe-se que:

• 10% dos dados da coleção são amarelos;

• o número de dados cúbicos é igual ao triplo do número de dados octaédricos;

• 20% dos dados amarelos são cúbicos.

O João seleciona ao acaso um dos dados da coleção e verifica que é verde.

Qual é a probabilidade de esse dado ser octaédrico? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste intermédio 1 (2013/14)

74. Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

• A e B são incompatíveis;

• $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que as probabilidades $P(A)$, $P(A|B)$ e $P(\overline{B} \mid A)$ são todas diferentes e escreva-as por ordem crescente.

Teste intermédio 1 (2013/14)

75. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um octaedro regular [ABCDEF], cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

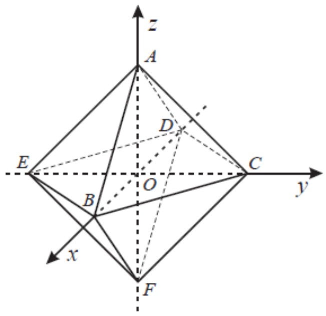



Figura 1

a) Escolhem-se ao acaso dois vértices distintos do octaedro. Qual é a probabilidade de a reta definida por esses dois

vértices ser paralela à reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$ ? Apresente o resultado na forma de fração.

b) Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos vértices do octaedro. Sejam X e Y os acontecimentos seguintes.

X : «o vértice escolhido pertence ao plano definido por $y = 0$»

Y : «a soma das coordenadas do vértice escolhido é positiva»

Averigue se os acontecimentos X e Y são independentes. Justifique. Na sua justificação, deve indicar os vértices que pertencem a cada um dos acontecimentos X, Y e $X \cap Y$.

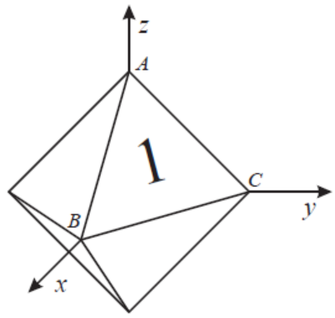



Figura 2

c) Admita agora que a face [ABC] do octaedro está numerada com o número 1, como se observa na Figura 2. Pretende-se numerar as restantes faces do octaedro com os números de 2 a 8 (um número diferente em cada face). De quantas maneiras diferentes se podem numerar as restantes sete faces, de modo que, depois de o octaedro ter todas as faces numeradas, pelo menos três das faces concorrentes no vértice A fiquem numeradas com números ímpares?

Teste intermédio 1 (2013/14)

76. Escolhe-se, ao acaso, um professor de uma certa escola secundária. Sejam A e B os acontecimentos:
A : «o professor escolhido é do sexo masculino»
B : «o professor escolhido ensina Matemática»
Sabe-se que:
• P(A) = 0,44
• $P(A \cup \bar{B}) = 0,92$
Qual é a probabilidade de o professor escolhido ensinar Matemática, sabendo que é do sexo feminino?
(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$

Teste intermédio 1 (2013/14)

77. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• P(A) = 0,4
• $P(A \cap B) = 0,2$
• $P(B|\bar{A}) = 0,8$
Qual é o valor de P(B)?
(A) 0,28 (B) 0,52 (C) 0,68 (D) 0,80

Exame nacional de 2014 (1.ª fase)

78. Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Exame nacional de 2014 (1.ª fase)

79. Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números −1, 1, 2 e 3. Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo. Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

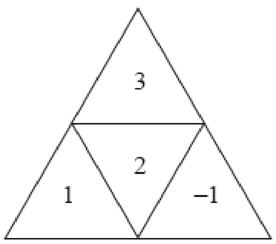


Figura 3

A: «o número registado no primeiro lançamento é negativo»
B: «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»
Elabore uma composição, na qual indique o valor de P(A|B), sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Na sua resposta, explique o significado de P(A|B) no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de P(A|B)

Exame nacional de 2014 (1.ª fase)

80. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• A e B são acontecimentos independentes;
• P(A) = 0,4
• $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,48$
Qual é o valor de P(B) ?
(A) 0,08 (B) 0,12 (C) 0,2 (D) 0,6

Exame nacional de 2014 (2.ª fase)

81. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um octaedro [ABCDEF], cujos vértices pertencem aos eixos coordenados. Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro. Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação
z = 5 ?

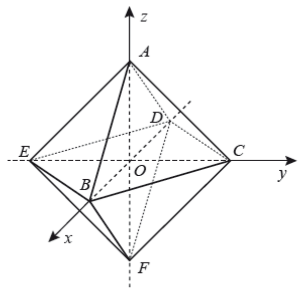


Figura 1

(A) $\frac{1}{{}^6C_3}$ (B) $\frac{4}{{}^6C_3}$ (C) $\frac{8}{{}^6C_3}$ (D) $\frac{12}{{}^6C_3}$

Exame nacional de 2014 (2.ª fase)

82. Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita. Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Exame nacional de 2014 (2.ª fase)

83. Considere a linha do triângulo de Pascal em que a soma dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 20. Escolhendo, ao acaso, um elemento dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser par?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

Exame nacional de 2014 (fase especial)

84. De uma turma de 12.º ano, sabe-se que:
• 60% dos alunos são rapazes;
• 80% dos alunos estão inscritos no desporto escolar;
• 20% dos rapazes não estão inscritos no desporto escolar.

a) Determine a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Considere agora que essa turma de 12.º ano tem 25 alunos. Pretende-se escolher, ao acaso, três alunos dessa turma para a representarem num evento do desporto escolar.
Determine a probabilidade de serem escolhidos, pelo menos, dois alunos que estão inscritos no desporto escolar. Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Exame nacional de 2014 (fase especial)

85. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• A e $\bar{A}$ são acontecimentos equiprováveis;
• A e B são acontecimentos independentes.
Mostre que $2P(A \cup B) = 1 + P(B)$

Exame nacional de 2014 (fase especial)

86. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
• $P(A) = 0,4$
• $P(\bar{B}) = 0,7$
• $P(A \cup B) = 0,5$
Qual é o valor de $P(\bar{A} \cup \bar{B})$?
(A) 0,6 (B) 0,7 (C) 0,8 (D) 0,9

Exame nacional de 2015 (1.ª fase)

87. De uma empresa com sede em Coimbra, sabe-se que:
• 60% dos funcionários residem fora de Coimbra;
• os restantes funcionários residem em Coimbra.

a) Relativamente aos funcionários dessa empresa, sabe-se ainda que:
• o número de homens é igual ao número de mulheres;
• 30% dos homens residem fora de Coimbra.
Escolhe-se, ao acaso, um funcionário dessa empresa. Qual é a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Considere agora que a empresa tem oitenta funcionários.
Escolhem-se, ao acaso, três funcionários dessa empresa. A probabilidade de, entre esses funcionários, haver no máximo dois a residir em Coimbra é igual a

$$\frac{{}^{80}C_3 - {}^{32}C_3}{{}^{80}C_3}$$

Elabore uma composição na qual explique a expressão apresentada.
Na sua resposta:
• enuncie a regra de Laplace;
• explique o número de casos possíveis;
• explique o número de casos favoráveis.

Exame nacional de 2015 (1.ª fase)

88. Um saco contém nove bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9. As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas e as restantes são brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola do saco e observa-se a sua cor e o seu número. Considere os seguintes acontecimentos, associados a esta experiência aleatória:
A: «a bola retirada é preta»
B: «o número da bola retirada é um número par»
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$? (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{4}$

Exame nacional de 2015 (2.ª fase)

89. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(A) \neq 0$. Prove que

$$P(A \cup \overline{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A)$$

Exame nacional de 2015 (2.ª fase)

90. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o poliedro [NOPQRSTUV] que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:
• o vértice P pertence ao eixo Ox
• o vértice N pertence ao eixo Oy
• o vértice T pertence ao eixo Oz
• o vértice R tem coordenadas (2, 2, 2)

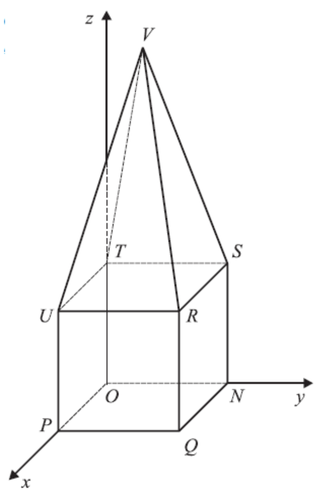


Figura 3

Dispõe-se de sete cores diferentes, das quais uma é branca e outra é azul, para colorir as nove faces do poliedro [NOPQRSTUV].Cada face vai ser colorida com uma única cor.
Considere a experiência aleatória que consiste em colorir, ao acaso, as nove faces do poliedro, podendo cada face ser colorida por qualquer uma das sete cores. Determine a probabilidade de, no final da experiência, o poliedro ficar com exatamente duas faces brancas, ambas triangulares, exatamente duas faces azuis, ambas quadradas, e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes. Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas de milésima.

Exame nacional de 2015 (2.ª fase)

91. Seja $\Omega$, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
- $P(A \cup B) = 0,7$
- $P(B) = 0,4$
- $P(A \cap B) = 0,2$

Qual é o valor de $P(B|A)$ ?
(A) 0,25 (B) 0,3 (C) 0,35 (D) 0,4

Exame nacional de 2015 (fase especial)

92. Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia. De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?
(A) 40 140 (B) 30 240 (C) 20 340 (D) 10 440

Exame nacional de 2015 (fase especial)

93. Um saco contém nove bolas numeradas de 1 a 9, indistinguíveis ao tato. Retiram-se, sucessivamente e ao acaso, três bolas do saco. As bolas são retiradas com reposição, isto é, repõe-se a primeira bola antes de se retirar a segunda e repõe-se a segunda bola antes de se retirar a terceira. Qual é a probabilidade de o produto dos números das três bolas retiradas ser igual a 2? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Exame nacional de 2015 (fase especial)

94. Seja $\Omega$, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
- $P(A) = \frac{2}{5}$
- $P(B) = \frac{3}{10}$
- $P(A \mid B) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{13}{20}$ (D) $\frac{19}{30}$

Exame nacional de 2016 (1.ª fase)

95. Seja $\Omega$, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:
- $P(A) = 0,2$
- $P(B) = 0,3$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6$

Qual é o valor de $P(A|B)$?
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$

Exame nacional de 2016 (2.ª fase)

96. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 9.
a) Considere duas caixas, U e V. Colocam-se as fichas numeradas de 1 a 5 na caixa U e as fichas numeradas de 6 a 9 na caixa V. Realiza-se a seguinte experiência.
Retira-se, ao acaso, uma ficha da caixa U e retira-se, também ao acaso, uma ficha da caixa V. Sejam A e B os acontecimentos:
A : «A soma dos números das fichas retiradas é igual a 10»
B : «O produto dos números das fichas retiradas é ímpar»
Determine o valor de $P(B|A)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada. Na sua resposta:
– explique o significado de $P(B|A)$ no contexto da situação descrita;
– indique os casos possíveis, apresentando cada um deles na forma (u,v), em que u designa o número da ficha retirada da caixa U e v designa o número da ficha retirada da caixa V
– indique os casos favoráveis;
– apresente o valor pedido na forma de fração irredutível.
b) Na Figura 2, está representado um tabuleiro com 16 casas, dispostas em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4). Pretende-se dispor as nove fichas (numeradas de 1 a 9) no tabuleiro, de modo que cada ficha ocupe uma única casa e que cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal?

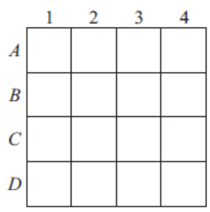


Figura 2

Exame nacional de 2016 (2.ª fase)

97. Uma pessoa lança um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e regista o número da face que ficou voltada para cima. Uma outra pessoa lança um dado com a forma de um tetraedro regular, com as faces numeradas de 1 a 4, e regista o número da face que ficou voltada para baixo. Admita que ambos os dados são equilibrados. Qual é a probabilidade de, pelo menos, uma dessas pessoas registar o número 4? (A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$

Exame nacional de 2016 (fase especial)

98. Um saco contém *n* bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n, sendo n um número par maior do que 3.

a) Retiram-se, em simultâneo e ao acaso, três bolas do saco.
Escreva uma expressão, em função de *n*, que dê a probabilidade de, dessas três bolas, duas terem número par e uma ter número ímpar. Não simplifique a expressão que escrever.

b) Admita agora que *n* = 8. Ao acaso, extraem-se sucessivamente duas bolas do saco (primeiro uma e depois outra) e observa-se o número de cada uma delas. Sejam A e B os acontecimentos:
A : «A primeira bola extraída tem número par.»
B : «A segunda bola extraída tem número par.»
Determine o valor de $P(A\cap B)$ no caso em que a extração é feita com reposição e no caso em que a extração é feita sem reposição. Justifique a sua resposta, tendo em conta que $P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A)$. Na sua resposta:
– interprete o significado de $P(A\cap B)$, no contexto da situação descrita;
– indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita com reposição;
– indique o valor de $P(B|A)$, no caso de a extração ser feita sem reposição;
– apresente o valor de $P(A\cap B)$, em cada uma das situações (designe esse valor por *a* no caso de a extração ser feita com reposição e por *b* no caso de a extração ser feita sem reposição).

Exame nacional de 2016 (fase especial)

99. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos. Sabe-se que:
• $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
• escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$. Quantos rapazes tem a turma?
(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

Exame nacional de 2017 (1.ª fase)

100. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o prisma quadrangular regular [OPQRSTUV]. Sabe-se que:
• a face [OPQR] está contida no plano xOy
• o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz

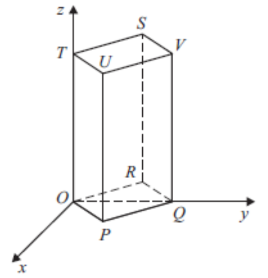


Figura 2

Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma. Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Exame nacional de 2017 (1.ª fase)

101. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6). Retira-se, ao acaso, uma bola do saco. Sejam A e B os acontecimentos:
A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»
B: «o número da bola retirada é par»
Escreva o significado de $P(\bar{A} \cup B)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade. Apresente a expressão na forma de uma fração.

Exame nacional de 2017 (1.ª fase)

102. Uma escola secundária tem alunos de ambos os sexos.

a) Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola. Seja A o acontecimento «o aluno escolhido é rapariga», e seja B o acontecimento «o aluno escolhido frequenta o 10.º ano».
Sabe-se que:
• a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz ou não frequentar o 10.º ano é 0,82
• a probabilidade de o aluno escolhido frequentar o 10.º ano, sabendo que é rapariga, é $\frac{1}{3}$
Determine P(A)

b) Uma das turmas dessa escola tem trinta alunos, numerados de 1 a 30. Com o objetivo de escolher quatro alunos dessa turma para formar uma comissão, introduzem-se, num saco, trinta cartões, indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a 30. Em seguida, retiram-se quatro cartões do saco, simultaneamente e ao acaso. Qual é a probabilidade de os dois menores números saídos serem o 7 e o 22? Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Exame nacional de 2017 (2.ª fase)

103. Considere duas caixas, $C_1$ e $C_2$. A caixa $C_1$ tem 12 bolas, das quais cinco são brancas e as restantes são pretas. A caixa $C_2$ tem sete bolas, umas brancas e outras pretas. Considere a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa $C_1$, colocá-las na caixa $C_2$ e, em seguida, retirar, também ao acaso, uma bola da caixa $C_2$.
Sejam A e B os acontecimentos:
A : «As bolas retiradas da caixa $C_1$ têm a mesma cor.»
B : «A bola retirada da caixa $C_2$ é branca.»
Sabe-se que $P(B \mid \bar{A}) = \frac{2}{3}$. Interprete o significado de $P(B \mid \bar{A})$ e indique, justificando, quantas bolas brancas e quantas bolas pretas existiam inicialmente na caixa $C_2$.

Exame nacional de 2017 (fase especial)

Soluções:
1. B 2. 840; 62; 3/1001 3. não 4. 75% 5. 1/2; 0,12 6. C 7. A 8. D 9. 10/19 10. D
11. C 12. C 14. ou 0 ou 1 ou 120 ou 12 ou 15840 15. C 17. B 18. 114240; 1/3; 2/5 19. 40 21. B 22. 0
23. C 24. B 25. C 26. 7/15; 195671700 28. C 29. D 30. 1/6 32. D 33. 74290 34. 94
35. D 36. 1/8 37. B 39. D 40. 0,071 42. B 43. ¼ 44. D 45. A 46. 1/3; ¾ 47. B
48. D 49. A 51. C 52. D 53. ½ 54. B 55. D 56. 18/29; 0,41 57. B 58. B 59. D 60. 0,35 62. 6/7; 14
63. Não 64. 1/3 65. 2/11; 25 66. ½ 67. C 68. 5/9 69. C 70. 0,86 71. D 72. 48; 2/3 73. 0,4; 17/90
74. $P(A|B) < P(A) < P(\overline{B} \mid A)$ 75. 1/15; são; 1872 76. C 77. C 78. 16/21 80. C 81. B 82. 1/3
83. C 84. 2/5; 0,91 86. C 87. 1/8 88.B 90. 0,0002 91. D 92. B 93. 1/243 94. C
95. A 96. 1/2; 9123840 97. A 98. ${}^{(n/2)}C_2 \times n/2 \, / \, {}^{n}C_3$; ¼ e 3/14 99. B 100. 3/7 101. (n-3)/n 102. 0,54; 0,001
103. 5 e 2

O professor: Roberto Oliveira