Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (metas curriculares) – 12.º ano

Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 2011)
Tema V: FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

1. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_9 (x)$. P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$.

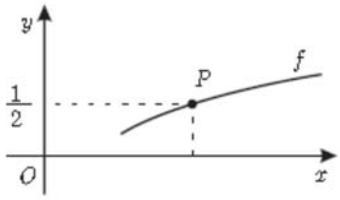


Figura 1

Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{9}{2}$

1.º teste intermédio 2011

2. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3 (7x+6) \geq 2 + \log_3 (x)$. Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

1.º teste intermédio 2011

3. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta. Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em <u>milhares</u>, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por $I(t) = \frac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$ em que k e p são parâmetros reais. Resolva os dois itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$. Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

<u>Nota</u> – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1961. Qual é, para este caso, a relação entre k e p? Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

1.º teste intermédio 2011

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\text{sen}(x-1)}{ex-e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ x e^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>.

a) Averigúe se a função f é contínua em $x = 1$

b) O gráfico da função f tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.

c) Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3}$

2.º teste intermédio 2011

5. Seja f a função, de domínio $]0,3[$, definida por $f(x) = x \ln x + sen(2x)$. O ponto A pertence ao gráfico da função f. Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função f no ponto A tem declive 3. Determine a abcissa do ponto A. Na resolução deste item deve:

• traduzir o problema por uma equação;

• resolver graficamente essa equação, <u>recorrendo à calculadora</u>;

• indicar o valor pedido arredondado às centésimas.

Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

2.º teste intermédio 2011

6. Seja f uma função de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \frac{1-e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

(A)]0, 1[(B)]1, 4[(C)]4, 6[(D)]6, 7[

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

7. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, t horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por $T(t) = 15 + 0,1t^2e^{-0,15t}$ com $t \in [0,20]$. Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. Apresente o resultado em horas e minutos,

apresentando os minutos arredondados às unidades. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

8. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-1} & \text{se } x<1\\[2ex] \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

a) O gráfico de f admite uma assimptota horizontal. Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e. Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas. Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar esses pontos;
• indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

9. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em ℝ por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se } x>0\\[2ex] \ln(k-x) & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$ é contínua.

Qual é o valor de k ?

(A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

10. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*. $N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_A(t)=\dfrac{120}{1+7\times e^{0,2t}}$ com $t\geq 0$. $N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, t dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_B(t)=\dfrac{150}{1+50\times e^{0,4t}}$ com $t\geq 0$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

11. Considere a função f , de domínio [0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x-2} & \text{se } 0\leq x<2\\[2ex] \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

b) Mostre, sem resolver a equação, que f (x) = -3 tem, pelo menos, uma solução em $]0,\frac{1}{2}[$

c) Estude f quanto à monotonia em]2, +∞[

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

12. Considere a função *f*, de domínio $]0,\frac{\pi}{2}[$, definida por $f(x)=e^{2x}+\cos x-2x^2$. Sabe-se que:

• B é um ponto do gráfico de *f*
• a recta de equação $y=8x$ é paralela à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

13. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & \text{se } 0<x\leq 2 \\ \frac{4}{x}+1 & \text{se } x>2 \end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que $\lim f(u_n) = 3$. Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2-\frac{1}{n}$ (B) $2+\frac{1}{n}$ (C) $3-\frac{1}{n}$ (D) $3+\frac{1}{n}$

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

14. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, E, que é a que os sismógrafos registam. A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$. A magnitude, M, de um sismo é estimada por $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2,9$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1. Determine o momento sísmico, M_0 , para esse sismo. Escreva o resultado na forma $a \times 10^n$, com n inteiro relativo e com a entre 1 e 10

b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos. Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

15. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x<1 \\ -x+\ln x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

(k designa um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine k , sabendo que f é contínua em x = 1

b) Considere, agora, $k = 3$. Estude a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do gráfico de f

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

16. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f , de domínio $]-\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15\ln(3 - \frac{1}{2}x)$. Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo [OACB], em que o ponto A pertence ao eixo das
abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

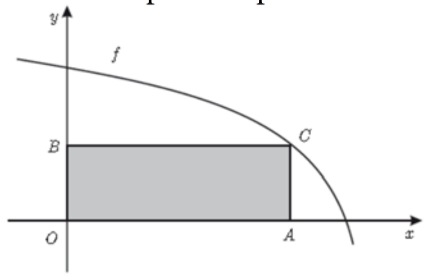


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo [OACB] é máxima.

Na sua resposta, deve:

• escrever a expressão que dá a área do rectângulo [OACB] em função da abcissa do ponto A;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

17. Para um certo valor real de k, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, t minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por $Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2)$ com $t\in[0,20]$. Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível. Determine o valor de k recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame Nacional 2011 (época especial)

18. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}}+1 & \text{se } x\neq -1 \\ a+2 & \text{se } x=-1 \end{cases}$$

(a é um número real.)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a sabendo que f é contínua em $x = -1$

b) Seja f' a primeira derivada de f. Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em]0, 1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional 2011 (época especial)

19. Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Seja *f* uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que lim $f(u_n) = 0$. Qual das seguintes expressões pode definir a função *f* ?
(A) 1 − ln x (B) 1 + ln x
(C) x − ln x (D) x + ln x

1.º teste intermédio 2012

20. Para um certo valor de α e para um certo valor de β, é <u>contínua</u> no ponto 0 a função *g*, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \beta - \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é esse valor de α e qual é esse valor de β ?
(A) α = 1 e β = 2 (B) α = 2 e β = 3
(C) α = 1 e β = 3 (D) α = 2 e β = 1

1.º teste intermédio 2012

21. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 + \log_3 x$. Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $f(x) \geq 4 + \log_3 (x-8)$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

b) Determine o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$

c) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x + f(x)$. Mostre que $\exists c \in]1,3[: g(c) = 5$

1.º teste intermédio 2012

22. Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que *x* dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por $f(x) = \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}}$ (considere que *x* = 0 corresponde ao instante em que o vírus foi detetado). Resolva os dois itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

a) No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados. Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior. Quantos dias tinham passado?

b) Para tentar verificar se um frango está infetado, o veterinário aplica um teste que ou dá positivo ou dá negativo. Sabe-se que:
• quando o frango está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é 96%
• quando o frango não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é 90%

Trinta dias após o instante em que o vírus foi detetado, existiam no aviário 450 frangos não infetados. Nesse dia, de entre todos os frangos do aviário (infetados e não infetados), o veterinário escolheu, ao acaso, um frango e aplicou-lhe o teste. O teste deu negativo. Qual é a probabilidade de o frango escolhido não estar infetado? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

1.º teste intermédio 2012

23. Para cada valor de k, a expressão

$$f(x) = \begin{cases} k + xe^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

define uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico tem:
• uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$
• uma assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$

Existe um valor de k para o qual as duas assíntotas são coincidentes, ficando assim o gráfico de *f* com uma única assíntota horizontal. Determine esse valor de k , <u>sem recorrer à calculadora</u>.

1.º teste intermédio 2012

24. Seja *a* um número real maior do que 1 e seja $b = a^{\pi}$. Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a (a^{12} \times b^{100})$?
(A) 138 (B) 326 (C) 1238 (D) 3770

2.º teste intermédio 2012

25. De uma certa função *f* sabe-se que:
• o seu domínio é]1, +∞[
• a sua derivada é dada por $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)$

a) Na Figura 3, estão representadas:
• parte do gráfico da função *f*
• a reta *r* que é tangente ao gráfico da função *f* no ponto A, de abcissa 2
• a reta *s* que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

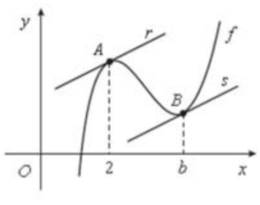


Figura 3

As retas *r* e *s* são paralelas. Seja b a abcissa do ponto B. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
• assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
• apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

b) Tal como a figura sugere, o gráfico da função *f* tem um ponto de inflexão. Determine a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

2.º teste intermédio 2012

26. Seja *f* a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-2e^2}{x-2} & \text{se } x<2\\[2ex] 3e^x+\ln(x-1) & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

Averigue se a função *f* é contínua em $x = 2$

2.º teste intermédio 2012

27. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$. Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

(A) $]0,\frac{1}{5}[$ (B) $]\frac{1}{5},\frac{1}{4}[$ (C) $]\frac{1}{4},\frac{1}{3}[$ (D) $]\frac{1}{3},1[$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

28. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *g*, de domínio $[a,+\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$. Para esse valor de *a*, a função *f* , contínua em $\mathbb{R}$, é definida por

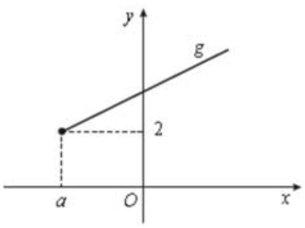


Figura 1

$$f(x)=\begin{cases}\log_3\left(-x-\frac{1}{3}\right) & \text{se } x<a\\[2ex] g(x) & \text{se } x\geq a\end{cases}$$

Qual é o valor de *a* ?

(A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

29. Considere a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, e a função *g*, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2}$ e $g(x) = -\ln x + 4$

a) Mostre que $\ln(2 + 2\sqrt{2})$ é o único zero da função *f* , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Considere, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções *f* e *g* e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:
• O é a origem do referencial;
• A e B são pontos do gráfico de *f*
• a abcissa do ponto A é o zero da função *f*
• o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o gráfico da função *g*

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir os gráficos das funções *f* e *g* , devidamente identificados, incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

30. Considere a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se } x>0\\[2ex] x\,e^{1-x} & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $x = -1$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

31. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função *f* , de domínio $]-6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(\frac{x}{3} + 2)$. Sabe-se que:
• a reta *r* é tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa *a*
• a inclinação da reta *r* é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de *a* ?

(A) -4 (B) $-\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{11}{2}$ (D) -5

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

32. Considere a função *f* , de domínio $[-7, 0[$, definida por $f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$. Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de *f* com a bissetriz dos

quadrantes pares, e seja *d* a distância entre os pontos A e B. Determine *d*, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor de *d* com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

33. Considere a função f , de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}} & \text{se } x<0\\ 1-e^{k+1} & \text{se } x=0 \qquad \text{com } k\in\mathbb{R}\\ \dfrac{1-e^{4x}}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k*, de modo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

b) Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

c) Seja *g* uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$.
Estude a função *g* quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

34. Sejam *f* e *g* funções de domínio $]0, +\infty[$. Sabe-se que:

• a reta de equação y = 3 é assíntota horizontal do gráfico de *f*
• *f* não tem zeros;
• $g(x) = \frac{e^{-x}-3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de *g* ?

(A) y = 3 (B) y = e (C) y = 0 (D) y = −1

Exame Nacional 2012 (época especial)

35. Sejam *a*, *b* e *c* três números tais que $a \in\ ]1,+\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$. Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b\times c}$?

(A) c + 3 (B) c − 3 (C) $\frac{c}{2}+3$ (D) $\frac{c}{2}-3$

Exame Nacional 2012 (época especial)

36. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, *t* minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por $C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}$ com $t \geq 0$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine o valor de *t* para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

Exame Nacional 2012 (época especial)

37. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função *f* , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x+1)$

Seja P um ponto do gráfico de *f*. A distância do ponto P à origem é igual a 2. Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2012 (época especial)

38. Considere as funções *f* e *g*, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x\neq 0\\ e^k-1 & \text{se } x=0\end{cases} \quad \text{com } k\in\mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *k* de modo que a função *g* seja contínua.

b) Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação

$2f'(x) = (f(x)+x)^2 - 1$

Exame Nacional 2012 (época especial)

39. Para certos valores de *a* e de *b* (*a* > 1 e *b* > 1), tem-se $\log_a b = 2$. Qual é, para esses valores de *a* e de *b*, o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?

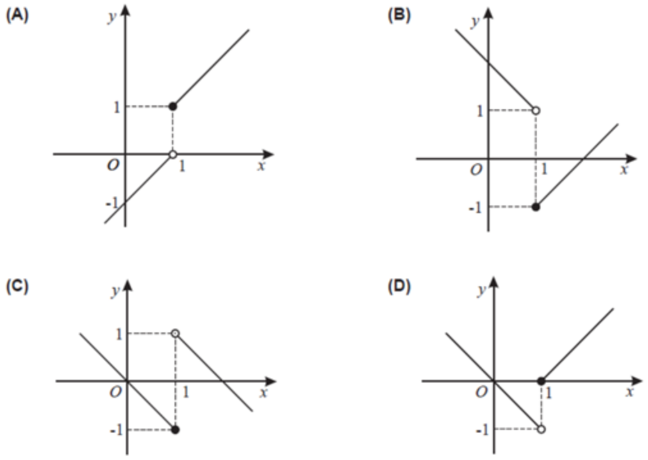
(A) $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$ (B) $-2+\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

1.º teste intermédio 2013

40. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} & \text{se } x<1 \\ \ln x & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

Seja g uma outra função, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função f × g é contínua no ponto 1. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função g ?



1.º teste intermédio 2013

41. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x\leq 4 \\ \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x>4 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

b) O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty,4]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OPQ] tal que:

• o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P.

Determine um valor aproximado da área do triângulo [OPQ], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$

• desenhar o triângulo [OPQ]

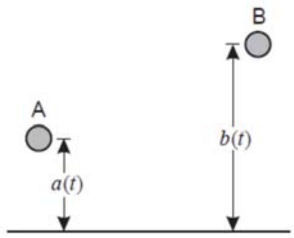
• indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;

• apresentar a área do triângulo [OPQ] arredondada às centésimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.º teste intermédio 2013

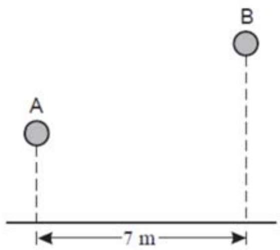
42. Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal. Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por



$a(t) = e^{-0,03t} - 0,02t + 3$ e $b(t) = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0,60]$). Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos. Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a) Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

1.º teste intermédio 2013

43. Para um certo número real k, positivo, seja f a função, de domínio $]-\infty,1[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \ln(k-x) & \text{se } x\leq 0 \\ 2e^x+\dfrac{1}{\ln x} & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua. Qual é o valor de k ?

(A) ln2 (B) e^2 (C) ln3 (D) e^3

2.º teste intermédio 2013

44. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a. Qual é o declive da reta r ?
(A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

2.º teste intermédio 2013

45. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja f'' a segunda derivada da função f. Sabe-se que f'' tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = e^{-x}x^2(x-1)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) O gráfico da função f tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função f tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

2.º teste intermédio 2013

46. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
a) Determine $f'(\frac{\pi}{2})$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.
b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

2.º teste intermédio 2013

47. Seja a um número real tal que $a > e$. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = a\,x + \ln x$. Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\frac{1}{a}, \frac{1}{e}[$.

2.º teste intermédio 2013

48. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x + f(x)}{3x} = 1$. Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?
(A) $y = \frac{1}{3}x$ (B) $y = \frac{2}{3}x$ (C) y = x (D) y = 3x

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

49. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a^x$ e $g(x) = a^{-x}$. Considere as afirmações seguintes.
I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.
II)– As funções f e g são monótonas crescentes.
III) $f'(-1) - g'(1) = \frac{2\ln a}{a}$
Qual das opções seguintes é a correta?
(A) II e III são verdadeiras.
(B) I é falsa e III é verdadeira.
(C) I é verdadeira e III é falsa.
(D) II e III são falsas.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

50. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{e^{4x} - 1} & \text{se } x < 0 \\ x\ln(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.
a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.
b) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$
Resolva o item c), recorrendo à calculadora gráfica.
c) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Sabe-se que:
• A é o ponto de coordenadas (2, 0)
• B é o ponto de coordenadas (5, 0)
• P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g
Para cada posição do ponto P, considere o triângulo [ABP]. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo [ABP] é 1. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

51. Na Figura 2 , está representada, num referen-cial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3. Sabe-se que:

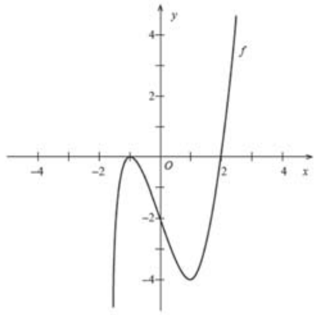


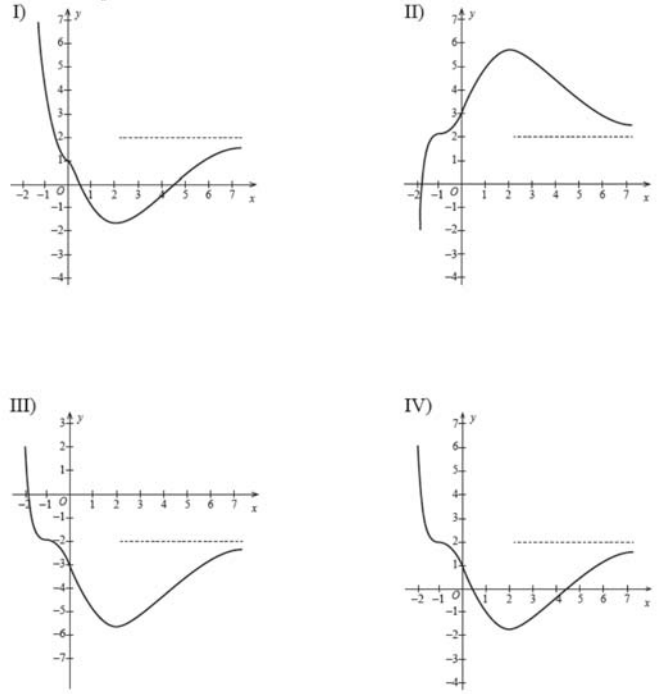
Figura 2

• -1 e 2 são os únicos zeros da função f

• g ´, a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x) \times e^{-x}$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - 2] = 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

• identifique a opção que pode representar a função g

• apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

52. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a (a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

53. Seja f uma função de domínio $[-e,1]$. Sabe-se que:

• f é contínua no seu domínio;

• f (–e) = 1

• f (1) = e

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação f $(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(B) A equação f (x)= e tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(C) A equação f $(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(D) A equação f $(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

54. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g ´, de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por g $'(x) = \ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

55. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas (2, 0) e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f. Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo [AOP] é mínima. Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar o valor da área do triângulo [AOP] com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

56. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 1

b) Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

57. Seja a um número real positivo. Considere o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}: \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$. Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S ?

(A) $]-\ln(1 + a), -\ln a[$ (B) $[-\ln(1 + a), -\ln a[$

(C) $]-\infty \ln(1 + a)]$ (D) $[-\ln(1 + a), +\infty[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

58. Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{2} - \ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k de modo que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

b) Mostre que $\ln(\frac{\sqrt{e}}{3})$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

59. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$. Sabe-se que:

• A é um ponto do gráfico de f

• a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos. Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (época especial)

60. Seja b um número real. Sabe-se que log b = 2014. Qual é o valor de log (100b)?

(A) 2016 (B) 2024 (C) 2114 (D) 4028

2.º teste intermédio 2014

61. Na Figura 1, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1,e\}$.

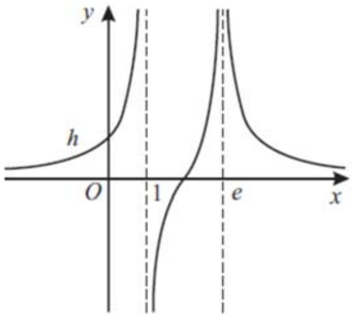


Figura 1

Tal como a figura sugere, as retas de equações $y = 0$, $x = 1$ e $x = e$ são as assíntotas do gráfico da função h. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim h(x_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes não pode ser termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $(1 + \frac{1}{n})^n$ (B) $(1 + \frac{1}{n})^3$

(C) $1 - \frac{1}{n}$ (D) $e + \frac{1}{n}$

2.º teste intermédio 2014

62. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. A sua derivada, f ‘, é definida por $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$. Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f?

(A) Zero. (B) Um. (C) Dois. (D) Três.

2.º teste intermédio 2014

63. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1. Determine a equação reduzida da reta t.

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Na sua resposta, deve:

• mostrar que existe uma única assíntota vertical e escrever uma equação dessa assíntota;

• mostrar que existe uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ e escrever uma equação dessa assíntota;

• mostrar que não existe assíntota não vertical quando $x \to -\infty$

c) Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f , os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f , e a reta AB. Sabe-se que:

• a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares; os pontos A e B têm abcissas simétricas;

• a abcissa do ponto A pertence ao intervalo]0,1[

Seja a a abcissa do ponto A. Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

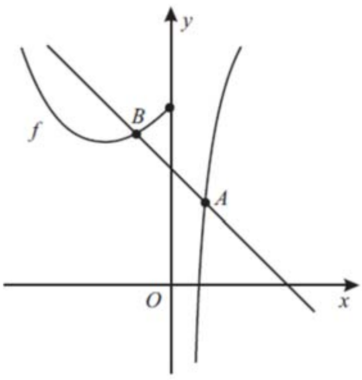


Figura 2

• equacionar o problema;
• reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
• indicar o valor de a, com arredondamento às milésimas.

2.º teste intermédio 2014

64. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t)=(4t+2)\,e^{3{,}75-t}, \quad \text{para } t\in[0,6]$$

Como, por exemplo, f(1,5) ≈ 76, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

a) Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

b) Nessa escola, há 300 alunos. Às 18 horas de quinta-feira da próxima semana, vão ser escolhidos aleatoriamente 3 alunos, de entre os 300 alunos da escola, para responderem a um inquérito. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos alunos escolhidos estar com gripe? Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

2.º teste intermédio 2014

65. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-3$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$ (B) $-e$ (C) 0 (D) $+\infty$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

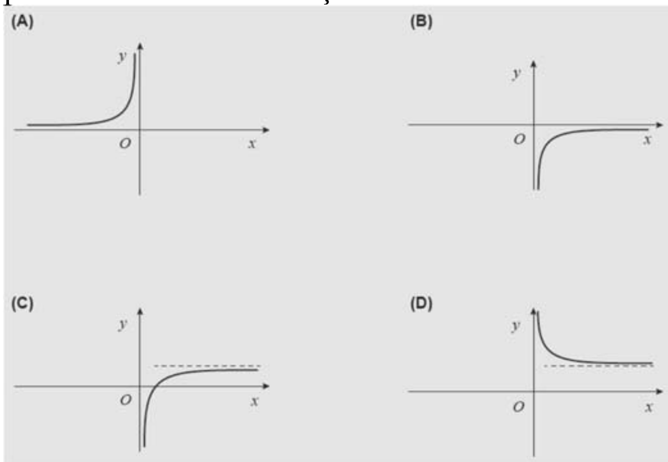
66. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por f (x) = k e^x + x. O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[. A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $\left]-e,-\frac{1}{e}\right[$ (B) $\left]-\frac{1}{e},0\right[$

(C) $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ (D) $\left]\frac{1}{e},1\right[$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

67. Considere, para um certo número real a positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=a+\ln\frac{a}{x}$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ‘, primeira derivada da função f ?



Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

68. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se } x<4\\[2mm] \ln\left(2e^x-e^4\right) & \text{se } x\geq 4\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 4

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para +∞, de equação y = x + b, com b ∈ $\mathbb{R}$. Determine b

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

69. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por f(x) = − ln(x + e^2). Na Figura 5, estão representados, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo [ABC]

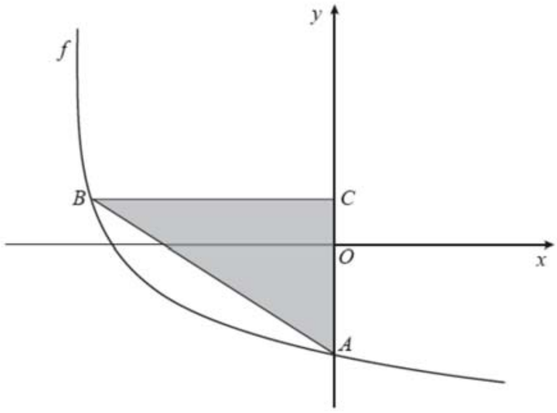


Figura 5

Sabe-se que:

• o ponto A tem coordenadas (0, -2)

• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;

• o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B

• a área do triângulo [ABC] é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo [ABC] em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

70. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por g(x) = ln (e − x). Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Qual é o valor de lim g(x_n) ?

(A) $+\infty$ (B) e (C) 1   (D) $-\infty$

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

71. Considere as funções f e g, de domínio $]-\infty, 0[$, definidas por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$ e g(x)=-x+f(x).

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

b) Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

c) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

72. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio [0,10], definida por

$$f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$$

e dois pontos A e B. Sabe-se que:

• o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;

• a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

— equacionar o problema;

— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;

— indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

73. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3. Sabe-se que:

• -2 e 3 são os únicos zeros da função f

• a função f tem um extremo relativo em x = −2

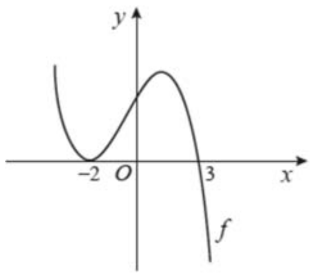


Figura 6

• h’, primeira derivada de uma função h, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $h'(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$

• $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$

Considere as afirmações seguintes.

I) A função h tem dois extremos relativos.

II) h’’(−2) = 0

III) y + 3 = 0 é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

74. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f(x_n) ?

(A) -∞ (B) 0 (C) 1 (D) +∞

Exame Nacional 2014 (época especial)

75. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$g(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

a) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

b) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação y = mx, com m <0. Sabe-se que:
- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abcissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo [OAB] é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
— indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (época especial)

76. Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio]–∞,*e*[, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x\le 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6}+k & \text{se } 2<x<e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k, de modo que a função f seja contínua em x = 2

b) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

Exame Nacional 2014 (época especial)

77. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ (B) k – 2 (C) $\frac{k}{9}$ (D) k – 9

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

78. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$. Qual é o valor de lim f (u_n)?

(A) 0 (B) 1 (C) *e* (D) +∞

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

79. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante, a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t}$ $(t \geq 0)$

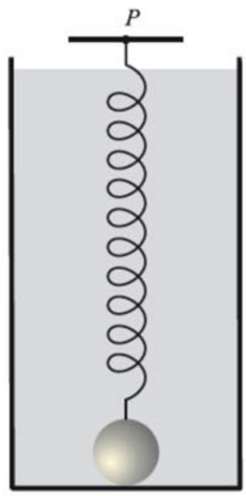


Figura 3

a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em cm3, arredondado às centésimas.

b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

80. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-\sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x<\dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x\ge\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $]\frac{1}{2},+\infty[$. Na sua resposta, apresente:

• o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
• o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
• as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Mostre que a equação f (x) = 3 é possível em]1, *e*[e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas. Na sua resposta:
• recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação f(x) = 3 tem, pelo menos, uma solução no intervalo]1, *e*[
• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
• apresente a solução pedida.

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

81. Para certos valores de a e de b (a>1 e b>1), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a (a^2 b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) 5

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

82. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2+e^{x+k} & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{2x+\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) ln2 (D) ln 3

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

83. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1+xe^{x} & \text{se } x\leq 3 \\ \ln(x-3)-\ln(x) & \text{se } x>3 \end{cases}$$

Resolva os itens a), b) e c), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

b) Resolva, em $]-\infty, 3]$, a condição f (x) − 2x >1. Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

84. Seja a um número real. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por f (x) = $e^{a \ln x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto P(2,8). Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f

Qual é o valor de a ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2015 (época especial)

85. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N=\frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \quad (t\geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante t = 0 corresponde ao <u>final</u> do ano 1800.

a) Determine a taxa média de variação da função N no intervalo [10, 20]. Apresente o resultado arredondado às unidades. Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

b) Mostre que

$$t=\ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$$

Exame Nacional 2015 (época especial)

86. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por

$$f(x)=x^2 e^{1-x}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
• a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
• os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
• o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero [OABC], sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta:
— reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo [0, 5]
— apresente o desenho do quadrilátero [OABC]
— indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
— apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2015 (época especial)

87. Seja a um número real diferente de 0. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

86. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$. Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)+e^x-x}{x}=1$
- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?
(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

88. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja <u>derivada</u>, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f(x)=e^x(x^2+x+1)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \quad \text{e} \quad q=-\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

89. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja a um número real maior do que 1. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

91. Para certos valores de a e de b ($a>1$ e $b>1$), tem-se $\log_a(ab^3)=5$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

92. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\ln(x)$. Considere a sucessão de termo geral $u_n=\dfrac{n}{e^n}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?
(A) $-\infty$ (B) 0 (C) e (D) $+\infty$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

93. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro. Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato. Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por $p=\dfrac{600x}{1-e^{-nx}} \quad (x>0)$ em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos. Na resolução do item a), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% (x=0,003). Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros? Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

b) Determine $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{600x}{1-e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

94. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x\le0\\ x-\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

c) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

95. Sejam *a* e *b* dois números reais superiores a 1, tais que $a=b^3$. Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b+\log_b a$?

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 3

Exame Nacional 2016 (época especial)

96. Seja f a função, de domínio $[-3,3]$, cujo gráfico está representado na Figura 1. Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$. Quais são as soluções da equação $(f \circ g)(x)=0$?

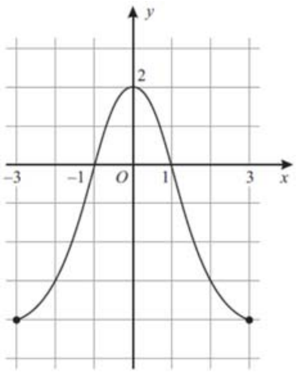


Figura 1

(A) $\frac{1}{e}\,;\, e^2$ **(B)** $e\,;\, e^2$

(C) $1\,;\, e$ **(D)** $\frac{1}{e}\,;\, e$

Exame Nacional 2016 (época especial)

97. O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível. Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial. Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível. Considere que V é dada, em função de x, por

$V(x)=3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) \quad (x\geq 0)$

Nos itens a) e b), a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas. Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

b) Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo. Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2016 (época especial)

98. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2}<x<0\\ \ln\left(e^x+x\right) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$. Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$. Na sua resposta, indique:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Na Figura 3, estão representados:

• parte do gráfico da função f

• um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa *a*

• a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

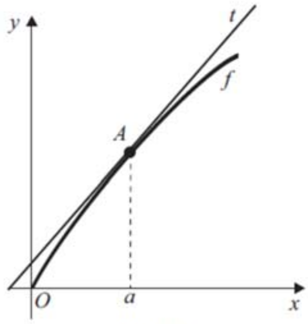


Figura 3

Sabe-se que:

• $a \in]0,1[$
• a reta t tem declive igual a 1,1
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A. Na sua resposta:
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2016 (época especial)

99. Seja k um número real positivo. Considere a função g, de domínio $]-k,+\infty[$, definida por $g(x)=\ln(x+k)$. Mostre que:

se $g(0)\times g(k)<0$, então $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame Nacional 2016 (época especial)

100. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta [OP] e [RQ]. A distância entre as duas paredes é 7 metros. O segmento de reta [OR] representa a superfície da água do rio.

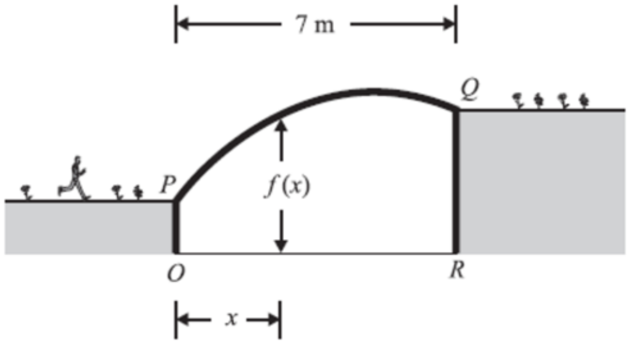


Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro. Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse
ponto ao arco PQ é dada por
$f(x)=9-2{,}5(e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1})$, com $x\in[0,7]$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta [OR] cuja abcissa x verifica a equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2+x^2}=2$. Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros. Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte? Justifique a sua resposta.

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

101. Seja g a função, de domínio R, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

b) Resolva, no intervalo $]4, 5[$, a equação $g(x) = 3$

c) Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo [OAP]. Sabe-se que:
• o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
• o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
• a área do triângulo [OAP] é igual a 5

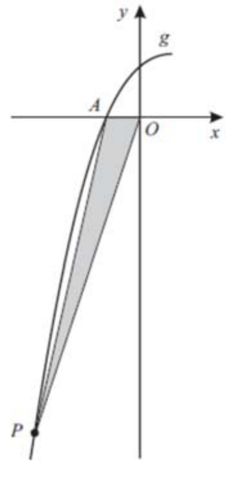


Figura 4

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P
Apresente o valor obtido arredondado às décimas.
Na sua resposta:
— determine analiticamente a abcissa do ponto A
— equacione o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

102. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ Resolva os itens a), b) e c) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

b) Resolva a inequação f (x)>2 ln x. Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

c) Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\frac{k}{x}+f(x)$, tem um extremo relativo para x = 1. Determine esse número k

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

103. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim. A Figura 4 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

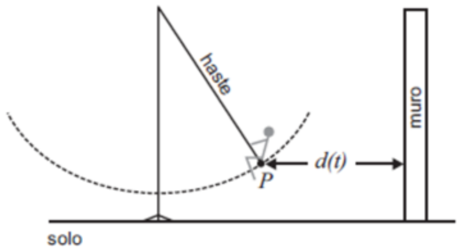


Figura 4

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão. Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t)=\begin{cases}30+t\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } 0\le t<12\\ 30+12e^{12-t}\,\text{sen}(\pi t) & \text{se } t\ge 12\end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

a) Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação d(t) = 27 no intervalo [0,6], e interprete o resultado no contexto da situação descrita. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

b) Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm. Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é 4,2 dm. Qual é o comprimento da haste? Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

104. Seja a um número real superior a 1. Qual é o valor de $4+\log_a(5^{\ln a})$?

(A) ln(10e) (B) ln(5e^4) (C) ln(5e^2) (D) ln(20e)

Exame Nacional 2017 (época especial)

105. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém. Admita que a massa, p, de poluente, medida em gramas, t horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo k, dada por $p(t)=120\,e^{-kt}\quad(t\ge 0)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo exclusivamente a métodos analíticos. Na resolução do item b), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine o valor de k, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora. Apresente o resultado na forma ln a, com a>1.

b) Admita agora que k = 0,7. Determine a taxa média de variação da função p no intervalo [0,3] e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita. Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2017 (época especial)

106. Seja f a função, de domínio]1 −π, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{\text{sen}(x-1)} & \text{se } 1-\pi<x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ e^{-2x+4}+\ln(x-1) & \text{se } x>1\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa.

«A função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

b) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1-\frac{\pi}{2}$

c) O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo]1, 2[. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;

• apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2017 (época especial)

Soluções:

1. C 2.]0,3] 3. 1963; k=−ln(3−p) 4. É; y=2x; ln3 5. 2,63 6. B 7. 13h20
8. (5e/2,0);(-1,12;-1,41) e (1,22;1,80) 9. A 10. 29; 8 11. Não há; crescente 12. 0,91 13. B
14. $6{,}26\times10^{19}$ 15. 0; y=3 16. 2,47 17. 0,18 18. -2 19. A 20. B 21.]8,9]; 2000
22. 40; 0,995 23. 2 24. B 25. 4,14; 3 26. é 27. B 28. A 29. 2,2 30. y=3x+1; $y=2e^2x+e^2$
31. D 32. 9,46 33. ln5−1; x=0; ¼ 34. D 35. C 36. 20 37. 0,48 38. -ln2; 0 e 4 39. D
40. A 41. 3; y=-3; 2,95 42. 7,5; 23 43. B 44. D 45. D 46. 0; y=3x+1 48. D 49. B
50. Não tem; min=−1 e max=1; 0,31 e 0,61 e 1,56 e 2,52 51. IV 52. A 53. D 54. ln(-2+ √19) 55. 2,92
56. Não ; y=2x 57. B 58. $e^{-3/2}$ 59. 0,63 60. A 61. B 62. B 63. y=x+2; x=0 e y=3; 0,413
64. 12h de 2.ªf; 0,16 65. C 66. B 67. B 68. Não; ln2 69. -6,71 70. D 71. A 72. 9,35
73. FVF 74. D 75. $e^{-1/2}$; 5,41 76. 11/5; y=0 77. B 78. A 79. 4,19; 25 80. Não tem; (1,0); 2,41
81. D 82. A 83. y=1 e y=0;]-∞,0[∪]ln2,3]; y=3/4 x-3-ln4 84. A 85. 11 86. y=0; 0 e 2; 2,92 87. B
88. D 89. −*e*; −2 e −1 90. x=−1 e x=1 91. B 92. A 93. 26; 600/n 94. Não tem; -π/6; -1,19 e -0,17 95. C
96. D 97. 50; 80 98. 0; -π/3; 0,72 100. 1,5; não 101. É; x=1+π; -3,3 102. x=0 e y=0;]1/2,1[; 1
103. 4; 18 104. B 105. ln2; -35 106. Verdadeira; y=-2x+2; 1,23

O professor: Roberto Oliveira