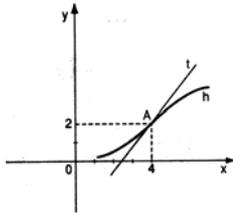


Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 1996)

Tema III: FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1. A recta t é tangente ao gráfico da função polinomial h no ponto A de abcissa 4. A 2.ª derivada de h , no ponto 4:

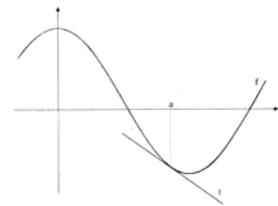
- (A) É 2 (B) É 1/2
(C) Não existe (D) É 0.



Exame Nacional 1996 (1.ª chamada)

2. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Sabendo que f admite 1.ª e 2.ª derivadas no ponto a , então podemos concluir que:

- (A) $f'(a) \cdot f''(a) > 0$ (B) $f(a) \cdot f''(a) > 0$
(C) $f'(a) \cdot f''(a) < 0$ (D) $f(a) \cdot f'(a) < 0$



Exame Nacional 1996 (2.ª fase)

3. Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dado por $r(t) = \frac{1 + 4t}{2 + t}$ ($t \geq 0$).

- a) Calcule $r(0)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ e diga qual é o significado físico desses valores.
b) Esboce o gráfico de f , tendo já em conta que, no domínio indicado, a função r tem 1.ª derivada positiva e 2.ª derivada negativa.
c) Diga qual é o significado do limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{r(t) - r(0)}{t}$ e determine-o.
d) Calcule, com aproximação à décima de segundo, o instante t para o qual a área da nódoa é igual a 30 cm². (Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo 2 casas decimais).

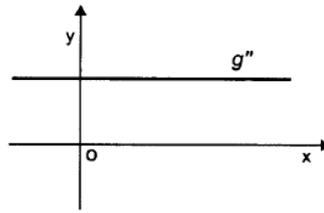
Prova modelo 1997

4. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = x^5 - x + 1$. O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

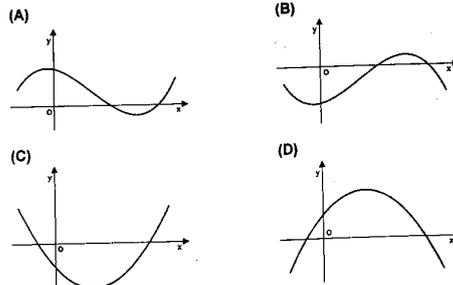
- (A) $]-1,0[$ (B) $]0,1[$ (C) $]1,2[$ (D) $]2,3[$

Exame Nacional 1997 (1.ª chamada)

5. Na figura a seguir está representado o gráfico de g'' , 2.ª derivada de uma certa função g .

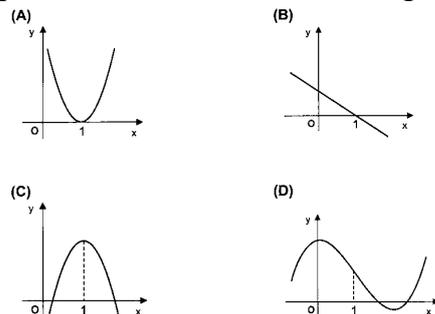


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?



Prova modelo 2000

6. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da 2.ª derivada de g ?



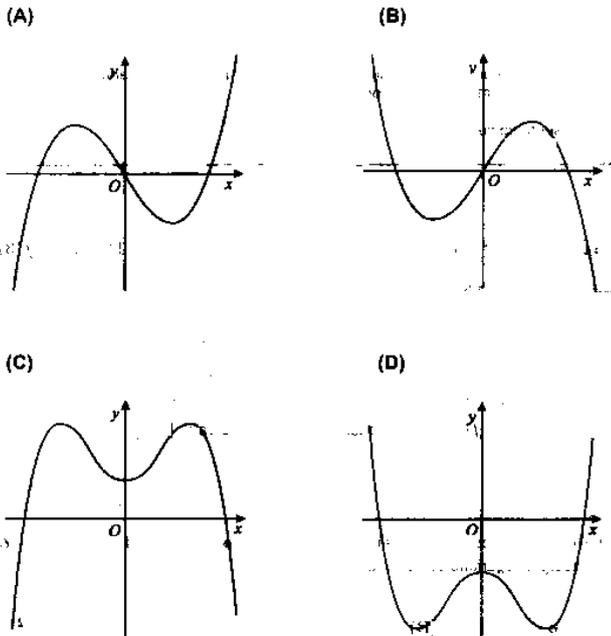
Exame Nacional 2000 (2.ª chamada)

7. De uma função f , contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$
(B) A função f não tem zeros no intervalo $[1,3]$
(C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$
(D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

Exame Nacional 2001 (1.ª chamada)

8. Seja g uma função, de domínio \mathbb{R} , tal que a sua 2.ª derivada é definida por $g''(x) = 1 - x^2$. Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da função g ?



Exame Nacional 2001 (1.ª chamada)

9. De uma função g , contínua em \mathbf{R} , sabe-se que: 1 é zero de g ; $g(3) > 0$. prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, 1 solução no intervalo $]1,3[$

Exame Nacional 2001 (2.ª fase)

10. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$. Na figura 1 está parte da representação gráfica da função f' e, na figura 2, parte da representação gráfica da função f'' , respectivamente primeira e segunda derivadas de f .

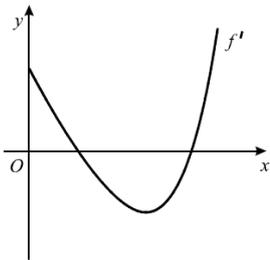


Figura 1

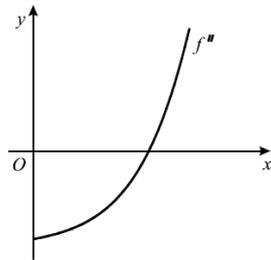
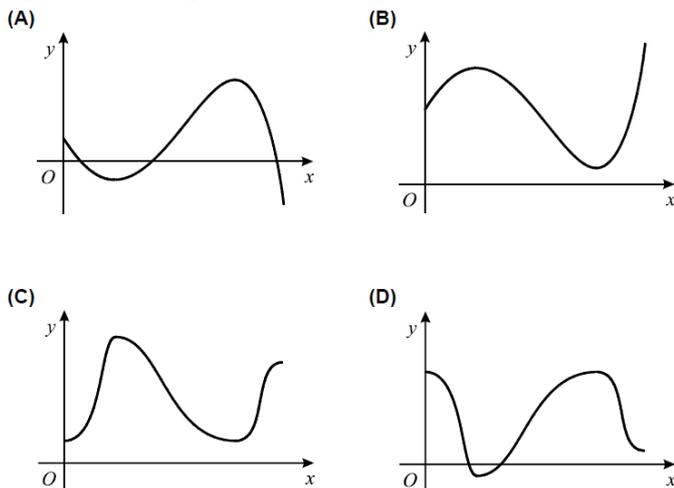


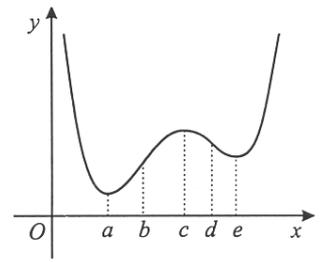
Figura 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica da função f ?



Exame Nacional 2001 (militares)

11. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbf{R} . Numa das alternativas seguintes estão os quadros de sinais de f' e de f'' . Em qual delas?



(A)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

(B)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

x		b		d	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

(C)

x		a		c		e	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

(D)

x		a		c		e	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

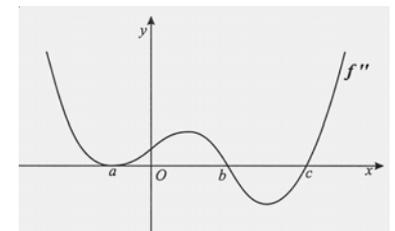
x		b		d	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

Exame Nacional 2002 (1.ª chamada)

12. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$. Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$. Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

Exame Nacional 2002 (2.ª chamada)

13. Seja f uma função de domínio \mathbf{R} . Na figura está representada parte do gráfico de f' , 2ª derivada da função



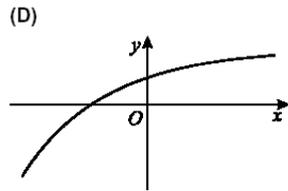
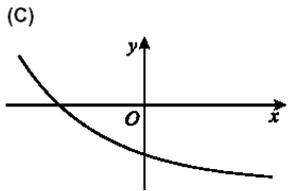
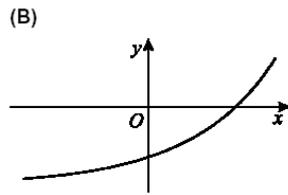
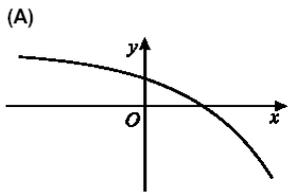
f . Relativamente ao gráfico da função f , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
- (B) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
- (C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0,b]$
- (D) A concavidade está sempre voltada para cima

Exame Nacional 2002 (2.ª fase)

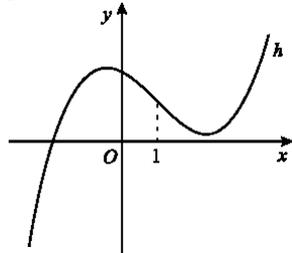
14. Seja f uma função de domínio \mathbf{R} . Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas

em \mathbb{R} . Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?



Exame Nacional 2003 (1.ª chamada)

15. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial h .



O ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão de h . Qual das expressões seguintes pode definir h'' , segunda derivada da função h ?

- (A) $(x-1)^2$ (B) $(1+x)^2$ (C) $x-1$ (D) $1-x$

Exame Nacional 2004 (1.ª fase)

16. Considere, para cada $\alpha \in]0,1[$, a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x)=x^\alpha$. Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

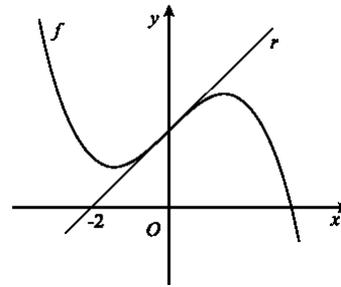
Exame Nacional 2004 (2.ª fase)

17. De uma função f , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que $f(3)=8$ e $f(7)=1$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) $1 \leq f(6) \leq 8$
 (B) A função f não tem zeros em $[3,7]$
 (C) $f(4) > f(5)$
 (D) 2 pertence ao contradomínio de f

Exame Nacional 2005 (2.ª fase)

18. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial f . Tal como a figura sugere, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e voltada para baixo em $[0,+\infty[$.

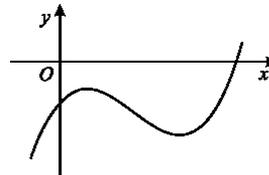


A recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2 . Sabendo que f' e f'' designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de f , indique o valor de $f(0)+f'(0)+f''(0)$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2006 (1.ª fase)

19. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R} .



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h , respectivamente. Admita que estas duas funções também têm domínio \mathbb{R} . Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

- (A) $h(0) + h''(0)$ (B) $h(0) - h'(0)$
 (C) $h'(0) - h''(0)$ (D) $h'(0) \times h''(0)$

Exame Nacional 2006 (2.ª fase)

20. Seja $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$. Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c)=f(c+1)$.

Sugestão: considere a função $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x) - f(x+1)$

Exame Nacional 2006 (2.ª fase)

21. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R}_0^+ .

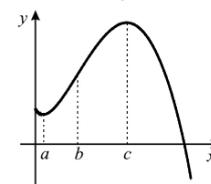


Figura 1

Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio \mathbb{R}_0^+ . Uma das funções representadas é h' ,

primeira derivada de h , e a outra é h'' , segunda derivada de h .

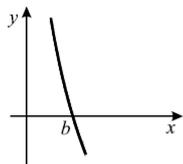


Figura 2

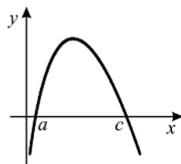


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'' , relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

Exame Nacional 2007 (2.ª fase)

22. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-2, 2]$. Tem-se $f(-2) = 1$ e $f(2) = 3$. Indique qual das expressões seguintes define uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] - 2, 2[$

- (A) $g(x) = x + f(x)$ (B) $g(x) = x - f(x)$
 (C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

2.º teste intermédio 2008

23. De uma função f de domínio $[1, 2]$ sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1, 2], f(x) < 0$
- $f(1) = 3f(2)$

Seja g a função de domínio $[1, 2]$ definida por $g(x) = 2f(x) - f(1)$

Prove que a função g tem pelo menos um zero.

2.º teste intermédio 2009

24. Na figura 1, está parte da representação gráfica de uma função polinomial f . O ponto de abcissa 2 é o único ponto de inflexão do gráfico da função f . Qual das expressões seguintes pode definir f'' , segunda derivada da função f ?

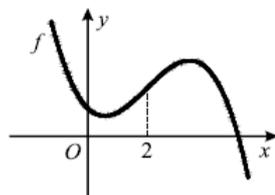


Figura 1

- (A) $(x - 2)^2$ (B) $(2 + x)^2$ (C) $2 - x$ (D) $x - 2$

2.º teste intermédio 2010

25. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f' , primeira derivada de f .

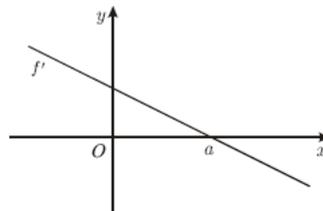


Figura 1

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f , tal que $f'(a) = 0$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função f tem um mínimo para $x = a$
 (B) A função f tem um ponto de inflexão para $x = a$
 (C) A função f é crescente em $]0, a[$
 (D) A função f é decrescente em \mathbb{R}

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

26. Seja f uma função, de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-1, 4]$. Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$. Em qual das opções seguintes está definida uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] - 1, 4[$?

- (A) $g(x) = 2x + f(x)$ (B) $g(x) = 2x - f(x)$
 (C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

2.º teste intermédio 2011

27. Na Figura 1, está o gráfico de uma função f cujo domínio é o intervalo $]1, 3[$. A função f tem primeira derivada e segunda derivada finitas em todos os pontos do seu domínio. Seja $x \in]1, 3[$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

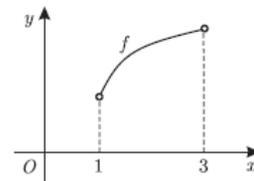


Figura 1

- (A) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ (B) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$
 (C) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$ (D) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$

2.º teste intermédio 2011

28. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g . Sabe-se que:

- g é uma função contínua em \mathbb{R}
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f'' , de uma certa função f tem domínio \mathbb{R} e é

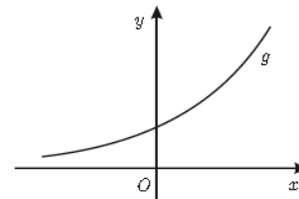
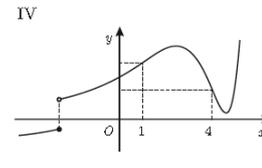
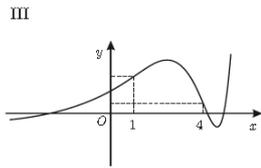
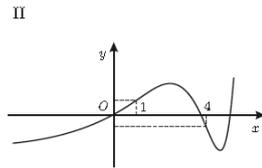
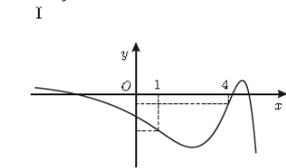


Figura 6

definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$

- $f(1) \times f(4) > 0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

29. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 4. Qual das expressões seguintes pode definir a função f'' , segunda derivada de f ?

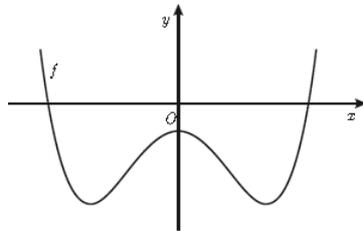


Figura 1

- (A) $(x - 3)^2$ (B) $(x + 3)^2$
 (C) $9 - x^2$ (D) $x^2 - 9$

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

30. Para um certo número real a , seja a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = ax^2 - 1.$$

Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f'' , segunda derivada da função f . Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a ?

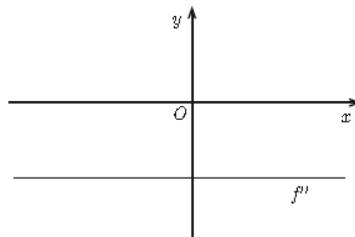


Figura 1

- (A) 0 (B) π (C) 3 (D) -3

Exame Nacional 2011 (época especial)

31. Relativamente a duas funções, f e g , sabe-se que:

- têm domínio $[2, 3]$
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.
 (B) A função $f - g$ é crescente.
 (C) Os gráficos de f e g não se intersectam.
 (D) A função $f - g$ é decrescente.

2.º teste intermédio 2012

32. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R}

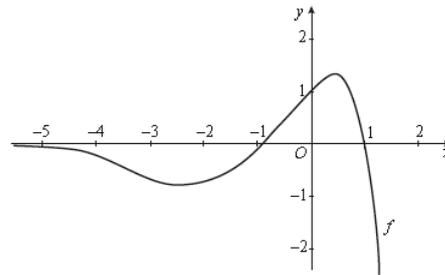


Figura 2

Sejam f' e f'' , de domínio \mathbb{R} , a primeira derivada e a segunda derivada de f , respetivamente. Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

- (A) $f'(1)$ (B) $f'(-3)$ (C) $f''(-3)$ (D) $f''(1)$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

33. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de h'' , segunda derivada de uma função h , de domínio \mathbb{R} . Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

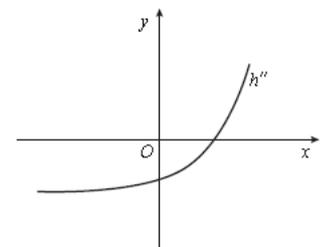
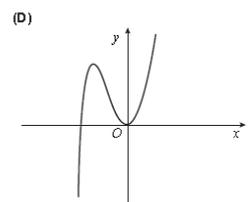
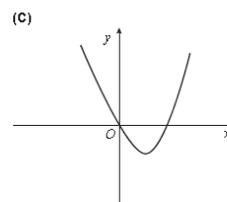
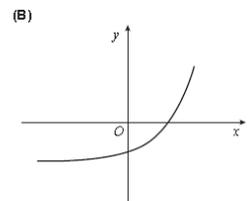
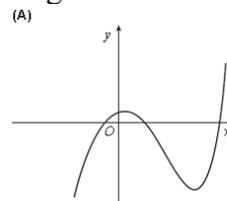


Figura 1

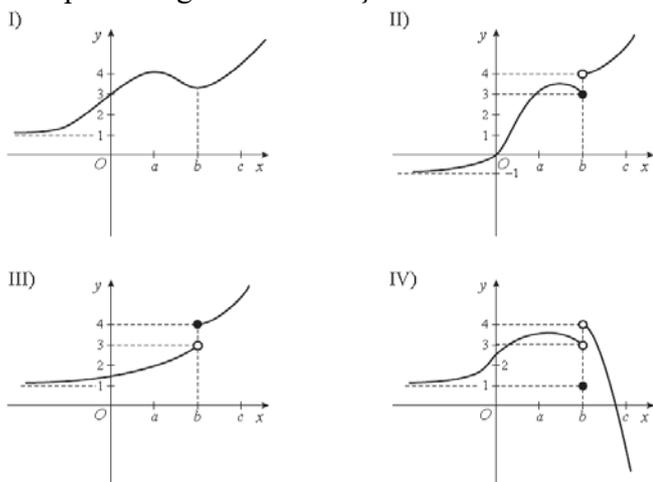


Exame Nacional 2012 (época especial)

34. Considere, num referencial o. n. xOy , o gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que:

- a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$
- h tem um mínimo relativo em $]a, c[$
- h é crescente em $]-\infty, 0[$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 1) = 0$
- a segunda derivada, h'' , da função h é tal que $h''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

Exame Nacional 2012 (época especial)

35. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$. Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$. Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

36. Sejam f' e f'' , de domínio \mathbb{R} , a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f , respetivamente. Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$
- $f''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) a é um zero da função f
- (B) $f(a)$ é um máximo relativo da função f
- (C) $f(a)$ é um mínimo relativo da função f
- (D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

37. Seja f uma função cuja derivada, f' , de domínio \mathbb{R} , é dada por $f'(x) = (4 + x)^2$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em \mathbb{R}
- (B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$
- (C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.
- (D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $(-4, f(-4))$

Exame Nacional 2013 (época especial)

38. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy , parte do gráfico da função g'' , segunda derivada de uma função g . Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g ?

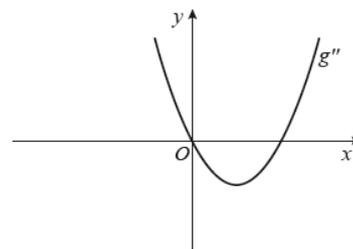
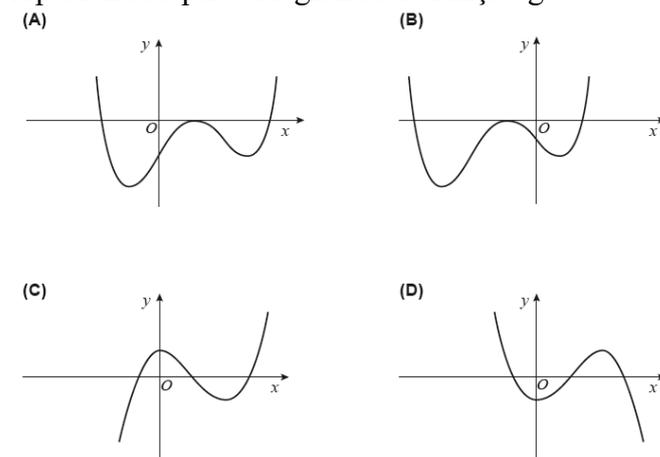
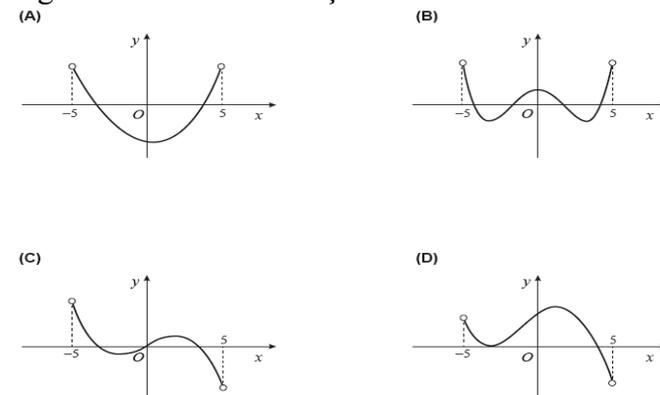


Figura 2



Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

39. Seja f uma função de domínio $]-5, 5[$. Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão. Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f'' , segunda derivada da função f ?



Exame Nacional 2014 (época especial)

40. Considere uma função f , de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que:

- a reta de equação $x = 0$ é assíntota do gráfico da função f
- $f(-3) \times f(5) < 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo $[-3,5]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

III) A função f é crescente em $]0, +\infty[$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame Nacional 2014 (época especial)

41. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- $f'(0) > 0$
- $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty, 0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f

Gráfico A

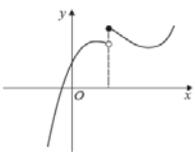


Gráfico B

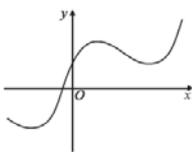
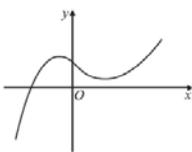


Gráfico C



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

42. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f

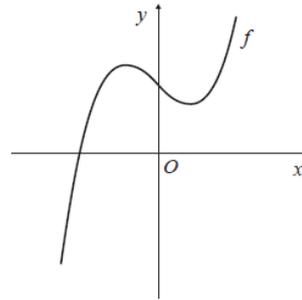
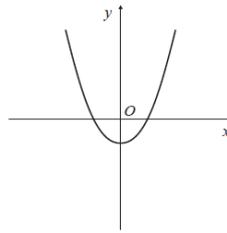


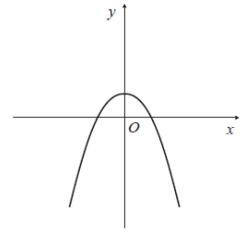
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f'' , segunda derivada da função f ?

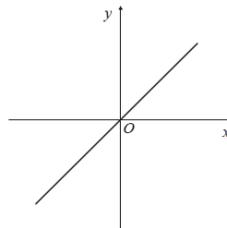
(A)



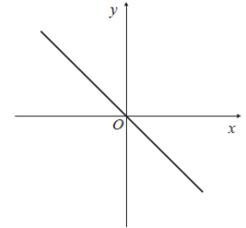
(B)



(C)



(D)



Exame Nacional 2015 (época especial)

43. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f . Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0. Seja f'' a segunda derivada da função f . Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $f''(1) + f''(2) < 0$ (B) $f''(-2) + f''(-1) > 0$
 (C) $f''(-1) \times f''(-2) < 0$ (D) $f''(1) \times f''(2) > 0$

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

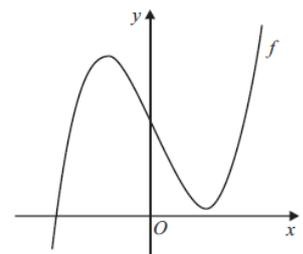


Figura 1

44. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} . A tabela de variação de sinal da função f'' , segunda derivada de f , é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por $g(x) = -f(x - 5)$. Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

- (A) $]-15, -5[$ (B) $]0, 10[$ (C) $]-5, 5[$ (D) $]5, 15[$

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

45. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico de uma função f , polinomial do terceiro grau. Tal como a figura sugere, a função f tem um máximo relativo para $x = -2$ e tem um mínimo relativo para $x = 2$. A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f .

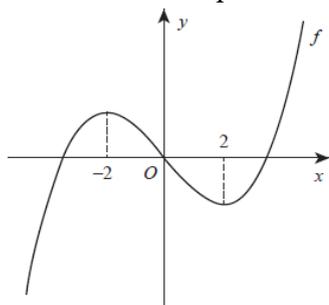


Figura 1

Sejam f' e f'' a primeira e a segunda derivadas da função f , respetivamente. Qual é o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$?

da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$?

- (A) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$ (B) $]-\infty, -2] \cup [0, 2]$

- (C) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ (D) $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

Exame Nacional 2017 (época especial)

Soluções:

1. D 2. C 3. 0,5 e 4; 7/4; 5,7 4. C 5. C 6. B 7. C 8. C 10. B 11. C 13. B 14. A 15. C
 17. D 18. C 19. C 21. 3 e 22. A 24. C 25. C 26. D 27. C 28. III 29. D 30. D 31. A 32. C
 33. A 34. I 36. B 37. D 38. A 39. A 40. FFV 42. C 43. D 44. C 45. A

O professor: Roberto Oliveira