www.esffranco.edu.pt
(2023/2024)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

2.º Período 06/02/2024 Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é igual a $16\,384$.

Quantos elementos dessa linha são maiores do que 2000 ?

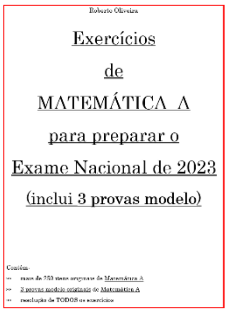
(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

2. Seja Ω o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos desse espaço ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(A) = \frac{13}{24}$;
- $P(B) = \frac{19}{24}$;
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{6}$.

Determine, na forma de fração irredutível, o valor de $P(B \mid A)$.



3. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica, cuja unidade é o metro.

A abcissa da respetiva posição no instante t, em segundos, á dada por $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 30$, com $t \geq 0$.

Houve um instante positivo em que a posição da partícula foi igual a 30 m.

Qual é a velocidade da partícula, em m/s, nesse instante?

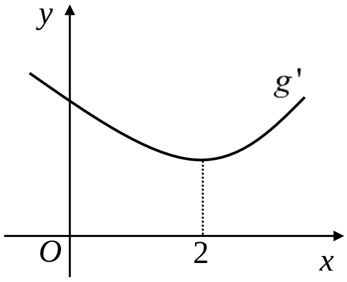
(A) -135 **(B)** 30 **(C)** $112{,}5$ **(D)** $153{,}5$

4. Considere a função f, diferenciável em $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\sqrt{5x}+5x$.

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de f num certo ponto é paralela à reta de equação $y=10x$.

Determine, sem recorrer à calculadora, a abcissa desse ponto.

5. Considere a função g, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.



Na figura está representada parte do gráfico da função g', primeira derivada de g.

Tal como sugere essa figura, g' tem um mínimo absoluto para $x=2$.

Pode concluir-se que:

(A) a função g é decrescente em $\mathbb{R}$.

(B) a função g é decrescente em $]-\infty,2]$.

(C) o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

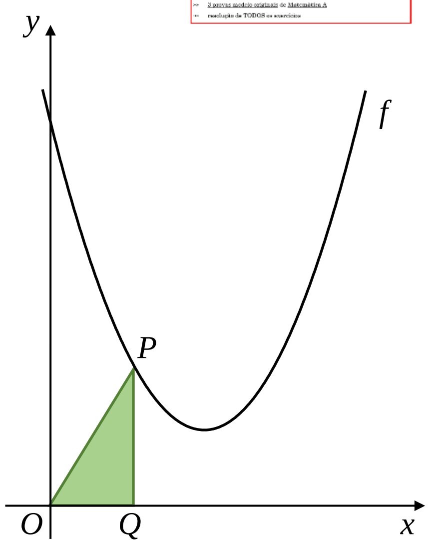
(D) o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,2]$.

6. Seja f a função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x)=\frac{(x^2-4)^3}{6}$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existirem.

7. Na figura ao lado, está parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, e o triângulo $[OPQ]$.



Sabe-se que:

- $f(x)=x^2-4x+5$;
- o vértice P pertence ao gráfico de f e tem abcissa x, com $0<x<2$;
- o vértice Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa de P;

Seja $g(x)$ a área do triângulo $[OPQ]$ em função de x.

7.1. Mostre que $g(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2+\frac{5}{2}x$.

7.2. Determine, sem usar a calculadora, o valor de x para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é mínima.

8. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} \dfrac{3\,\text{sen}(2x)}{x^2+3x} & \text{se} \quad x<0 \\ 2 & \text{se} \quad x=0 \\ \cos x+1 & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

8.1. Estude a continuidade da função g em $x=0$.

8.2. Resolva, em $]\pi, 5\pi]$, a equação $g(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

9. Sejam f e g as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x)=\text{sen}\, x$ e $g(x)=x+\frac{\pi}{6}$.

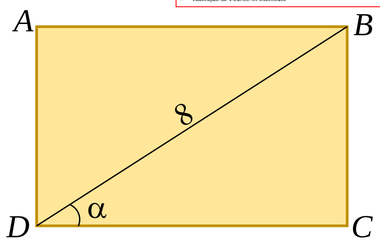
Qual das seguintes pode designar uma expressão da função $f \circ g$?

(A) $\frac{\text{sen}\,x+\sqrt{3}\cos x}{2}$ **(B)** $\frac{\text{sen}\,x-\sqrt{3}\cos x}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\cos x}{2}$ **(D)** $\frac{\sqrt{3}\,\text{sen}\,x+\cos x}{2}$

10. Na figura, está representado o retângulo $[ABCD]$.

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo BDC.

Se a diagonal do retângulo medir 8 unidades, qual das seguintes expressões dá a área do retângulo $[ABCD]$, em função de α ?



(A) $32\,\text{sen}(2\alpha)$ **(B)** $64\,\text{sen}(2\alpha)$

(C) $32\cos(2\alpha)$ **(D)** $64\cos(2\alpha)$

11. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\text{sen}(4x)+\text{sen}(2x)+2$.

11.1. Sabendo que o período positivo mínimo de h é π, determine, recorrendo à calculadora gráfica, o contradomínio da função h.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função h que visualizar na calculadora, no domínio escolhido;
- assinalar os pontos do gráfico correspondentes ao mínimo e máximos absolutos da função e indicar as suas coordenadas, com arredondamentos às centésimas.
- apresentar o contradomínio da função h, usando a notação de intervalos de números reais.

11.2. Determine todas as abcissas dos pontos de interseção entre o gráfico da função h e a reta de equação $y=2$.

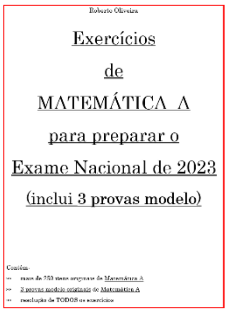
12. Seja k um número real não nulo.

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = k\,x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - 2x$.

Sabe-se que o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k.

FIM



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.**	
8	16	8	16	8	16	16	16	16	16	8	8	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$