

FICHA DE PREPARAÇÃO PARA O EXAME DE 12.^o ANO MATEMÁTICA A

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Não é permitido o uso de corretor.

Apresenta apenas uma resposta para cada item.

A ficha inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final da ficha.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta.

Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* \times *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* \times *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* \times *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

Fonte: iave.pt

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma determinada experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos independentes desse espaço de resultados.

Sabe-se que $P(A) = 0,3$ e $P(B) = 0,7$.

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

- (A) 1 (B) 0,79 (C) 0,21 (D) 0

2. Dos alunos de uma escola, sabe-se que:

- metade se desloca para a escola de autocarro;
- um quarto habita a menos de dez quilómetros da escola;
- metade dos que habitam a menos de dez quilómetros da escola desloca-se para a escola de autocarro.

Determina a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não se deslocar de autocarro para a escola e não habitar a menos de dez quilómetros da escola.

Apresenta o resultado em percentagem.

3. A soma de todos os elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 1024.

Qual é o quinto elemento da linha seguinte?

- (A) 210 (B) 252 (C) 330 (D) 462

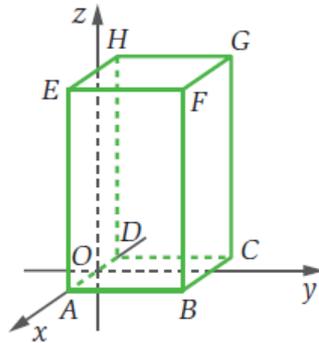
4. A soma dos seis primeiros termos de uma progressão geométrica de razão 2 é G ($G > 0$).

Qual é o terceiro termo dessa progressão?

- (A) $\frac{4G}{31}$ (B) $\frac{8G}{31}$ (C) $\frac{4G}{63}$ (D) $\frac{8G}{63}$

5. Na figura seguinte, está representado, em referencial ortonormado do espaço, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases quadradas paralelas ao plano xOy .

As coordenadas dos vértices A , B e G são, respetivamente, $(3,0,0)$, $(3,6,0)$ e $(-3,6,12)$.



- 5.1. Obtém uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[AG]$.

Apresenta essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

- 5.2. Seja r a reta de equação $(x, y, z) = (2, 2, 2) + k(3, 4, 6)$ ($k \in \mathbb{R}$) e seja P o ponto de interseção da reta r com o plano FBC .

Determina o volume da esfera com centro no ponto P e cuja superfície contém o ponto B .

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utiliza valores exatos.

- 5.3. Escolhem-se, aleatoriamente, dois vértices do prisma.

Determina a probabilidade de esses vértices serem extremos de uma diagonal de uma face do prisma.

Apresenta o valor pedido na forma de dízima, arredondado às milésimas.

6. Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n} \right)^n$?

(A) $\frac{1}{e^3}$

(B) 1

(C) e^3

(D) $+\infty$

7. Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = e^x - e^{3x}$.

7.1. Seja a um número real positivo. Qual é o valor de $h(\ln(2a))$?

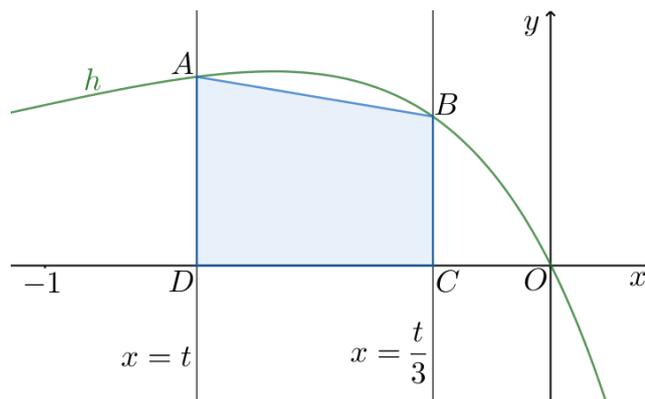
- (A) $-4a$ (B) $-6a$ (C) $2a - 6a^3$ (D) $2a - 8a^3$

7.2. Estuda a função h quanto à monotonia e determina, caso existam, os respetivos extremos relativos.

Apresenta os valores de eventuais extremos relativos na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$.

7.3. Na figura seguinte, estão representados, em referencial ortonormado do plano:

- parte do gráfico da função h ;
- as retas verticais de equações $x = t$ e $x = \frac{t}{3}$, sendo $-1 < t < 0$;
- o trapézio $[ABCD]$, em que A e B são os pontos de interseção das retas verticais com o gráfico da função h e C e D são os pontos de interseção dessas retas com o eixo Ox .



Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $0,2$, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifiques a validade do resultado obtido na calculadora.

Na tua resposta:

- mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de t , por

$$-\frac{t}{3} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{3t} \right)$$

- equaciona o problema;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação;
- apresenta o valor de t arredondado às centésimas.

8. Considera, em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, o número

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\text{Im}\left(\overline{z^2}\right)$?

- (A) -0,8 (B) -0,2 (C) 0,2 (D) 0,8

9. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considera os números complexos Z e W tais que:

$$z = \lambda i \quad (\text{com } \lambda \in \mathbb{R}^-) \quad \text{e} \quad w = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}t\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \quad (\text{com } t \in]10, 20[)$$

Determina para que valores de t o afixo de $Z \times W$ pertence ao 1º quadrante.

10. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(2x)} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{-2x} - 1}{\ln(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

10.1 Averigua se a função f é contínua em $x = 0$.

10.2 Estuda a função f quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico.

Em caso de existência, escreve, para cada assíntota, uma equação que a defina.

10.3 Seja g a função, de domínio $]-\infty, 3]$, definida por $g(x) = (x-3)^2$.

Qual é o valor de $g^{-1}\left[f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$? **Nota:** g^{-1} representa a função inversa da função g .

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

11. Sejam f uma função, de domínio \mathbb{R} , duas vezes diferenciável, g a função polinomial definida por $g(x) = 1 - 2x$ e h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = f(x) \times g(x)$.

Sabe-se que:

- a função f tem um extremo relativo em $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$) e $f''(k) > 0$;
- o gráfico da função h tem um ponto de inflexão de abscissa k .

Determina o valor de k .

12. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \sin(2x)$.

Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{f'(x) - f'(c)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, em que $c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$.

Determina o valor de c .

FIM

Item	1.	2.	3.	4.	5.1	5.2	5.3	6.	7.1	7.2	7.3	8.	Total
Cotação	9	12	9	9	12	12	13	9	9	12	13	9	200
Item	9.	10.1	10.2	10.3	11.	12.							
Cotação	12	13	12	9	13	13							