Avaliação – Teste sumativo 2.º Período

Matemática A | 12.º Ano

Nome: ______________________________ Turma: ____ Data: ____/____/____

Classificação: ____________________ Professor: __________ Enc. Educação: __________

Sugestão de cotações

1.	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	9.	10.	Total
10	10	14	14	14	10	13	14	14	14	10	13	13	14	10	13	**200**

Propostas de resolução

1. O número de casos possíveis é ${}^8C_4$, que é o número de maneiras de escolher quatro amigos entre os oito. Para o número de casos favoráveis, ao total de possibilidades de escolher quatro amigos, retiram--se todos os grupos de quatro em que os dois membros do casal não estejam presentes. Para isso, escolhem-se dois amigos entre os restantes seis (excluindo o casal), sendo o número de maneiras de o fazer é ${}^6C_2$. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^8C_4 - {}^6C_2$, pelo que a probabilidade pedida é $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$.

Resposta: C

2. O declive da reta r é dado por $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{3-0} = \frac{2}{3}$. Como o ponto de coordenadas $(0,2)$ pertence à reta r, a sua ordenada na origem é 2, pelo que a equação reduzida da reta r é $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{2}{3}x\right) = 2$, pelo que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x) - \frac{3\left(f(x)\right)^2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\,f(x) - 3\left(f(x)\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3f(x)\left(f(x) - \frac{2}{3}x\right)}{x} =$$

$$= -3\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{2}{3}x\right) = -\cancel{3} \times \frac{2}{\cancel{3}} \times 2 = -4$$

Resposta: D

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | 12.º ano

3.1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{e^{2x}\times e^{-kx}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{e^x\times e^x\times e^{-kx}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x-kx}}=\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{e^{x(1-k)}}\underset{k<1\Rightarrow 1-k>0}{=}\frac{1}{+\infty}\times\frac{1-\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}{e^{+\infty}}$$

$$=0\times\frac{1-0+0}{+\infty}=0\times\frac{1}{+\infty}=0\times0=0$$

3.2 A função g é contínua em $x=-1$ se $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=g(-1)$.

- $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^{kx}\left(x^2-4x+1\right)\right)=e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right)=e^{-k}(1+4+1)=6e^{-k}$

- $g(-1)=e^{-k}\left((-1)^2-4\times(-1)+1\right)=e^{-k}(1+4+1)=6e^{-k}$

- $\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{e^{x+1}}-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{i)}{=}}\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x+1)(x-2)}{\left(e^{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}-1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x+1}{e^{\frac{x+1}{2}}-1}\times\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2)=$

$$\underset{\substack{y=\frac{x+1}{2}\Leftrightarrow x+1=2y\\ x\to-1^-\Rightarrow y\to0^-}}{=}\lim_{y\to0^-}\frac{2y}{e^y-1}\times(-1-2)=2\lim_{y\to0^-}\frac{y}{e^y-1}\times(-3)=2\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}\times(-3)=2\times\frac{1}{1}\times(-3)=-6$$

Assim, $6e^{-k}=-6\Leftrightarrow e^{-k}=-1$, que é uma equação impossível em $\mathbb{R}$, pelo que não existe k de modo que a função g seja contínua em $x=-1$.

i) $x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$. Logo, $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

3.3 Para $k=-1$ e $x\in\left]-1,+\infty\right[$, tem-se $g(x)=e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)$.

Tem-se:

- $g'(x)=\left(e^{-x}\right)'\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)'=-e^{-x}\left(x^2-4x+1\right)+e^{-x}(2x-4)=$

$$=e^{-x}\left(-x^2+4x-1\right)+e^{-x}(2x-4)=e^{-x}\left(-x^2+4x-1+2x-4\right)=e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)$$

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(-x^2+6x-5\right)=0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee -x^2+6x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-5)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-6-4}{-2} \vee x=\frac{-6+4}{-2} \Leftrightarrow x=5 \vee x=1$$

Fazendo um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g :

x	-1		1		5	$+\infty$
e^{-x}	n.d.	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+6x-5$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$
Monotonia e extremos de g	n.d.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	máx.	$\searrow$

Portanto, para $k=-1$ e $x\in\left]-1,+\infty\right[$, a função g é decrescente em $\left]-1,1\right]$ e em $\left[5,+\infty\right[$ e é crescente em $\left[1,5\right]$. Tem mínimo relativo em $x=1$ e máximo relativo em $x=5$.

4. Tem-se, $\log_5\left(\dfrac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)=\log_5\left(\sqrt{\left(5^3\right)^x}\right)-\log_5\left(5a^x\right)=\log_5\left(\sqrt{5^{3x}}\right)-\left(\log_5(5)+\log_5\left(a^x\right)\right)=$

$$=\log_5\left(5^{\frac{3x}{2}}\right)-\left(1+x\log_5 a\right)\underset{\log_5 a=x}{=}\frac{3x}{2}-1-x\times x=-x^2+\frac{3x}{2}-1$$

Resposta: A

5. Pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c\in\left]1,3\right[$ tal que $(g\circ f)(c)=(f\times g)(c)$, de uma forma equivalente, que existe pelo menos um $c\in\left]1,3\right[$ tal que $(g\circ f)(c)-(f\times g)(c)=0$.

Seja h, a função definida em $[1,3]$ por $h(x)=(g\circ f)(x)-(f\times g)(x)$. Vamos mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $\left]1,3\right[$.

Tem-se:

- a função h é contínua em $[1,3]$ por ser o produto, a composição e a diferença entre funções contínuas no seu domínio;

- $h(1)=(g\circ f)(1)-(f\times g)(1)=g(f(1))-f(1)\times g(1)=g(3)-3\times\log_3(1)=\log_3(3)-3\times 0=1-0=1$

$\therefore\ h(1)>0$;

- $h(3)=(g\circ f)(3)-(f\times g)(3)=g(f(3))-f(3)\times g(3)=\log_3(f(3))-f(3)\times\log_3(3)=$

$$=\log_3(f(3))-f(3)\times 1=\log_3(f(3))-f(3)$$

Como $0<f(3)<1$, então $\log_3(f(3))<0$, pelo que $\underbrace{\log_3(f(3))}_{<0}-\underbrace{f(3)}_{>0}<0$.

$\therefore\ h(3)<0$.

Logo, como $h(1)$ e $h(3)$ têm sinais contrários ($\Rightarrow h(1)\times h(3)<0$), e como h é contínua em $[1,3]$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função h tem pelo menos um zero em $]1,3[$, ou seja, existe pelo menos um $c\in]1,3[$ tal que $h(c)=(g\circ f)(c)-(f\times g)(c)=0$, pelo que a equação dada é possível em $]1,3[$.

6.1 A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio, pelo que, se o seu gráfico tiver assíntota vertical, só poderá ser em $x=0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x-2\right)\underset{\substack{y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}\\ x\to 0^+\Rightarrow y\to+\infty}}{\overset{(0\times\infty)}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\ln\left(\frac{1}{y}\right)-2\right)\underset{ii)}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}(-\ln y)-2\right)=$

$$=-2+\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^2}=-2+\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{-1}{y}=-2+0\times\frac{-1}{+\infty}=-2+0\times 0=-2$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ é finito, o gráfico de f não tem assíntota vertical em $x=0$, e, portanto, não tem assíntotas verticais.

6.2 O domínio de validade da equação é $\mathbb{R}^+$.

Tem-se $f(x)+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x-2+x^2=2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x+x^2=2\ln x+2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(\ln x+1)=2(\ln x+1)\Leftrightarrow x^2(\ln x+1)-2(\ln x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x+1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \ \vee \ x^2-2=0$$

$$\Leftrightarrow \ln x=-1 \ \vee \ x^2=2 \Leftrightarrow x=e^{-1} \ \vee \ x=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e} \ \vee \ x=-\sqrt{2} \ \vee \ x=\sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2}\notin\mathbb{R}^+$ $\frac{1}{e}\in\mathbb{R}^+$ e $\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$, o conjunto-solução da equação é $\left\{\frac{1}{e},\sqrt{2}\right\}$.

6.3 Tem-se:

- $f'(x)=(x^2\ln x-2)'=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'-0=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\times\frac{1}{\cancel{x}}=2x\ln x+x$
- $f''(x)=(2x\ln x+x)'=(2x\ln x)'+x'=(2x)'\ln x+2x(\ln x)'+1=2\ln x+2\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}+1=2\ln x+3$
- $f''(x)=0\Leftrightarrow 2\ln x+3=0\Leftrightarrow 2\ln x=-3\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$

Fazendo um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
Gráfico de f	n.d.	$\cap$	p.i.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right[$. Tem ponto de inflexão em $x=e^{-\frac{3}{2}}$, cuja ordenada é:

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{3}{2}}-2=e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)-2=-\frac{3e^{-3}}{2}-2$$

Portanto, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3e^{-3}}{2}-2\right)$.

7.1 No início do movimento a distância da esfera ao chão é dada por:

$$d(0)=3+3{,}5e^{-0{,}31\times 0}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi\times 0}{3}\right)=3+3{,}5e^{0}\operatorname{sen}(0)=3+3{,}5\times 1\times 0=3+0=3$$

Como a distância do centro da esfera ao chão no início do movimento é igual a $3{,}5\,\text{cm}$, a medida do comprimento do raio da esfera é igual a $3{,}5-d(0)=3{,}5-3=0{,}5\,\text{cm}$.

Portanto, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera é igual a:

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi\times raio^3=\frac{4}{3}\pi\times(0{,}5)^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\frac{4\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$$

Resposta: A

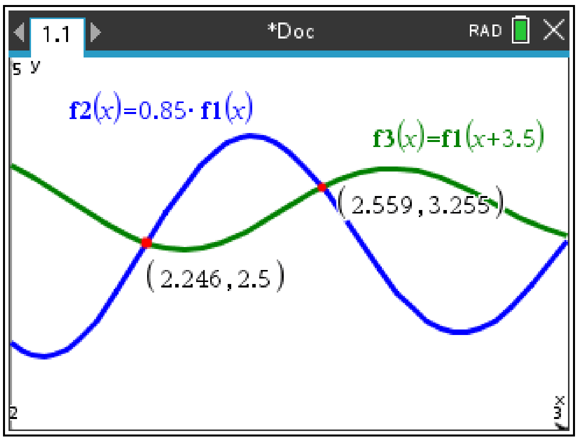
7.2 Sabemos que, durante o terceiro segundo de movimento, existem dois instantes, t_1 e t_2, tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Tem-se que $d(t)$ é a distância da bola ao solo num certo instante t e que $d(t+3{,}5)$ é a distância da bola ao solo três segundos e meio após o instante t.

Assim, pretende-se terminar os instantes $t\in[3,4]$ tais que:

$$d(t+3{,}5)=d(t)-0{,}15d(t)\Leftrightarrow d(t+3{,}5)=0{,}85d(t)$$

Utilizando o editor de função da calculadora gráfica, definem-se as funções $y_1=d(t+3{,}5)$ e $y_2=0{,}85d(t)$:



Portanto, $d(t+3{,}5)=0{,}85d(t) \Leftrightarrow t=t_1 \ \vee \ t=t_2$, em que $t_1 \approx 2{,}2$ e $t_2 \approx 2{,}6$.

Nota: foi usada a calculadora gráfica TI n-spire, em que $f_1(x)=3+3{,}5e^{-0{,}31x}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right)$.

8.1 Como existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ então $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ ($0 \notin D_g$).

- $$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\underbrace{1-\cos^2(2x)}_{=\operatorname{sen}^2(2x)}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2(2x)}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\times\frac{(2x)^2}{\operatorname{sen}^2(2x)}\times\frac{x^2}{(2x)^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}\right)^2\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} \underset{\substack{y=x^2 \text{ e } z=2x\\ x\to 0^- \Rightarrow y\to 0^+ \text{ e } z\to 0^-}}{\overset{(0\times\infty)}{=}} \lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\times\frac{1}{\left(\lim\limits_{z\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)^2}\times\frac{1}{4}$$

$$=1\times\frac{1}{1^2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

- $$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+f(x)}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}(2x)+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)}=\frac{2\times 0+\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{0+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)}{2}.$$

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então é diferenciável em $x=0$, o que implica que f é contínua em $x=0$, pelo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{2}=\dfrac{f(0)}{2}$ e, portanto, $\dfrac{f(0)}{2}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{2}{4} \Leftrightarrow f(0)=\dfrac{1}{2}$.

8.2 Como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, o que implica que também o é em $x=1$, e como tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1, então $f'(1)=0$ e $f(1)=2$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o declive da reta t é dado por $g'(1)$ e o ponto de coordenadas $(1,g(1))$ pertence ao gráfico de g.

Assim, $g'(x)=\left(\dfrac{2x+f(x)}{x+2}\right)'=\dfrac{(2x+f(x))'(x+2)-(2x+f(x))(x+2)'}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{(2+f'(x))(x+2)-(2x+f(x))\times 1}{(x+2)^2}=\frac{(2+f'(x))(x+2)-2x-f(x)}{(x+2)^2}.$$

Logo, o declive da reta t é igual a $g'(1)=\frac{(2+f'(1))(1+2)-2\times 1-f(1)}{(1+2)^2}=\frac{(2+0)\times 3-2-2}{3^2}=\frac{6-4}{9}=\frac{2}{9}$,

pelo que a equação reduzida da reta t é da forma $y=\frac{2}{9}x+b$.

Como $g(1)=\frac{2\times 1+f(1)}{1+2}=\frac{2+2}{3}=\frac{4}{3}$, substituindo as coordenadas $(1,g(1))$ na equação de t:

$$\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\times 1+b \Leftrightarrow b=\frac{4}{3}-\frac{2}{9} \Leftrightarrow b=\frac{10}{9}$$

$\therefore\ t: y=\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}$

9. Tem-se que $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{-(h(x)-h(a))}=-\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}}\underset{h \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}}{=}-\frac{1}{h'(a)}$.

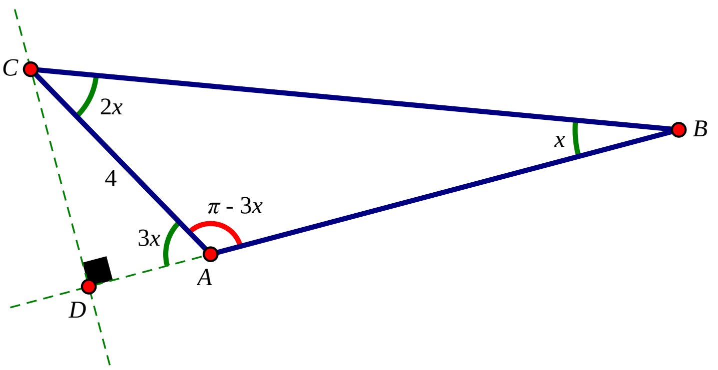
Tem-se $h'(x)=\left(\cos^2(2x)-2\right)'=2\cos(2x)\times(\cos(2x))'-0=2\cos(2x)\times(-2)\times\operatorname{sen}(2x)=$

$$=-2\times\underbrace{2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)}_{=\operatorname{sen}(2\times 2x)}=-2\operatorname{sen}(4x)$$

Logo, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{-(h(x)-h(a))}=-\frac{1}{h'(a)}=-\frac{1}{-2\operatorname{sen}(4a)}=\frac{1}{2\operatorname{sen}(4a)}$.

Resposta: B

10. Na figura seguinte, o segmento de reta $[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$.



Pretende-se, então, mostrar que:

$$\overline{CD}=12\operatorname{sen}x-16\operatorname{sen}^3 x$$

Tem-se que a amplitude do ângulo BAC é $\pi-2x-x=\pi-3x$, pelo que a amplitude do ângulo CAD é:

$$\pi-(\pi-3x)=\pi-\pi+3x=3x$$

Logo $\operatorname{sen}(3x)=\frac{\overline{CD}}{4}\Leftrightarrow\overline{CD}=4\operatorname{sen}(3x)$.

Portanto, $\overline{CD} = 4\operatorname{sen}(3x) \underset{3x=2x+x}{=} 4\operatorname{sen}(2x+x) = 4\left(\operatorname{sen}(2x)\cos x + \operatorname{sen} x \cos(2x)\right) =$

$$= 4\left(2\operatorname{sen} x \cos x \cos x + \operatorname{sen} x\left(\underbrace{\cos^2 x}_{=1-\operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x\right)\right) = 4\left(2\operatorname{sen} x \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\operatorname{sen}^2 x} + \operatorname{sen} x\left(1-2\operatorname{sen}^2 x\right)\right)$$

$$= 4\left(2\operatorname{sen} x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x\right) = 4\left(2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x\right)$$

$$= 4\left(3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x\right) = 12\operatorname{sen} x - 16\operatorname{sen}^3 x$$

FIM