

# Avaliação – Teste sumativo 2.º Período

Matemática A | 12.º Ano



Nome: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Classificação: \_\_\_\_\_ Professor: \_\_\_\_\_ Enc. Educação: \_\_\_\_\_

**Temas: Probabilidades, Continuidade, Assíntotas, Teorema de Bolzano, Derivadas, Funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas**

1. Oito amigos, entre os quais o casal Sofia e Carlos, decidiram ir a um concerto. Quando chegaram já só havia quatro bilhetes. Decidiram, então, sortear os quatro bilhetes pelos oito amigos.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, um dos elementos do casal ir ao concerto?

**A**  $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2}{{}^8C_4}$

**C**  $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$

**B**  $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2 \times 2}{{}^8C_4}$

**D**  $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_4}{{}^8C_4}$

2. Na figura, estão representados, em referencial o.n.  $Oxy$ , parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , e a reta  $r$ , assíntota ao gráfico de  $f$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à reta  $r$  e as suas coordenadas são, respetivamente,  $(0,2)$  e  $(3,4)$ .

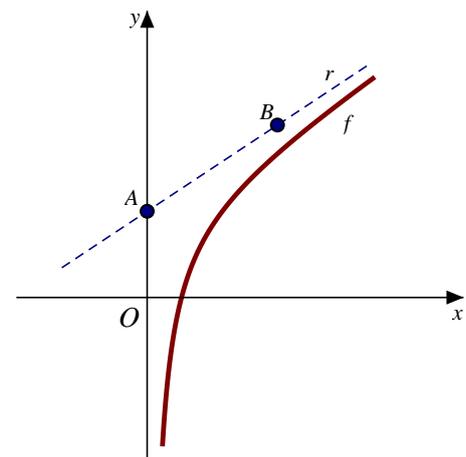
Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2f(x) - \frac{3(f(x))^2}{x} \right)$ ?

**A** 4

**C** 0

**B** 2

**D** -4



3. Considera que para cada  $k$  real, a seguinte expressão, definida por ramos, define uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{e^{x+1}} - 1} & \text{se } x < -1 \\ e^{kx}(x^2 - 4x + 1) & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

3.1 Determina o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{e^{2x}}$ , para o caso em que  $k < 1$ .

3.2 Verifica se existe algum  $k$  de modo que a função  $g$  seja contínua em  $x = -1$ .

3.3 Considera  $k = -1$ .

Estuda, para  $x \in ]-1, +\infty[$ , a função  $g$  quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na tua resposta deves indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de  $x$  para os quais a função  $g$  tem extremos relativos.

4. Sejam  $a$  e  $x$  dois números reais, com  $a > 0$ , tais que  $\log_5 a = x$ .

A expressão  $\log_5 \left( \frac{\sqrt{125^x}}{5a^x} \right)$  é equivalente a:

**A**  $-x^2 + \frac{3x}{2} - 1$

**C**  $x^2 - \frac{3x}{2} + 1$

**B**  $\frac{x}{2} - 1$

**D**  $-\frac{x}{2} + 1$

5. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, de domínio  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^+$ , respetivamente, tais que:

- $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ ;
- $f(0) = f(1) = 3$  e  $0 < f(3) < 1$ ;
- $g(x) = \log_3 x$ .

Mostra que a equação  $(g \circ f)(x) = (f \times g)(x)$  é possível no intervalo  $]1, 3[$ .

6. Considera a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = x^2 \ln x - 2$ .

6.1 Verifica se o gráfico da função  $f$  tem alguma assíntota vertical. Se tiver, indica a(s) sua(s) equação(ões).

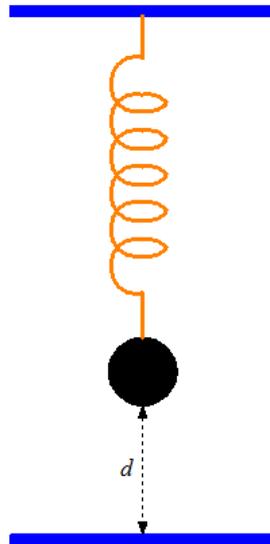
6.2 Determina o conjunto-solução da equação  $f(x) + x^2 = 2 \ln x$ .

6.3 Estuda a função  $f$  quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta debes:

- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para baixo;
- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função  $f$  tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

7. Na figura, está representada uma esfera suspensa numa mola que oscila verticalmente.



Admite que a distância, em centímetros, a que a esfera se encontra do solo,  $t$  segundos após o início do movimento oscilatório, é dada pela função  $d$ , definida por:

$$d(t) = 3 + 3,5e^{-0,31t} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right), \text{ com } t \geq 0$$

**7.1** Admite que, no início do movimento, a distância do centro da esfera ao solo é de 3,5 cm.

Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera?

**A**  $\frac{\pi}{6}$

**B**  $\frac{\pi}{4}$

**C**  $\frac{\pi}{3}$

**D**  $\frac{\pi}{2}$

**7.2** Durante o terceiro segundo de movimento, existem exatamente dois instantes tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15% .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determina esse instante.

Na tua resposta debes:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerares necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), com três casas decimais;
- apresentar os instantes pedidos, em segundos, arredondado às décimas.

**8.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de domínio  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , respetivamente, tais que:

- $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ ;
- a função  $f$  tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1;

▪  $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{1 - \cos^2(2x)} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x + f(x)}{x + 2} & \text{se } x > 0 \end{cases};$

- existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

**8.1** Qual é o valor de  $f(0)$ ?

**8.2** Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $g$  no ponto de abcissa 1.

9. Considera a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = \cos^2(2x) - 2$  e um número real  $a$  pertencente ao intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ .

A que é igual  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{h(a) - h(x)}$ ?

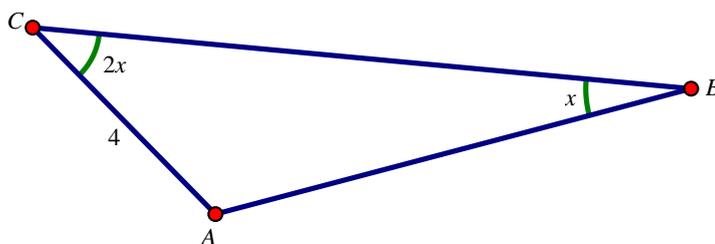
**A**  $\frac{1}{2\text{sen}(2a)}$

**C**  $-\frac{1}{2\text{sen}(4a)}$

**B**  $\frac{1}{2\text{sen}(4a)}$

**D**  $-\frac{1}{2\text{sen}(2a)}$

10. Na figura, está representado o triângulo  $[ABC]$ .



Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 4$ ;
- a amplitude, em radianos, do ângulo  $CBA$  é  $x$  e a do ângulo  $ACB$  é  $2x$ , com  $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$ .

Mostra que a altura do triângulo  $[ABC]$  em relação ao lado  $[AB]$  é dada por:

$$12\text{sen } x - 16\text{sen}^3 x$$

**FIM**