Itens para Avaliação intercalar – Fevereiro

Matemática A | 12.º Ano

<u>Temas</u>: Combinatória e Probabilidades. Funções

Combinatória e Probabilidades

Itens 1 a 11 da *newsletter* de novembro de 2024 (*Word* e PDF), item 1 da *newsletter* de março de 2024 (*Word* e PDF) e itens da *newsletter* de outubro de 2024 (*Word* – enunciado e resolução – e PDF – enunciado e resolução).

Funções

1. Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da condição:

$$\log_4(x+3) \geq \log_4(6-2x) - \log_2\left(\sqrt{x}\right)$$

Apresenta o conjunto na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

2. Para um certo valor real de $k > -1$, a função g, de domínio $[-1, +\infty[$, é contínua.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{x-k} - k}{\operatorname{sen}(k-x)} & \text{se} \quad -1 \leq x < k \\ \\ x & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

3. Considera a função h, de domínio $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, definida por $h(x) = \operatorname{sen}^2 x - 2\cos x$.

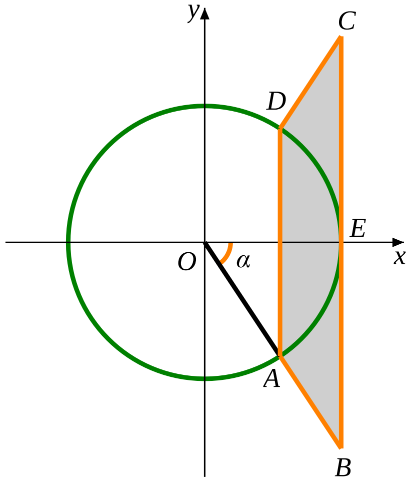
Estuda a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta, indica/apresenta:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

4. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência trigonométrica e ao eixo Ox;
- os pontos A e D pertencem à circunferência trigonométrica e são simétricos em relação ao eixo Ox;
- a reta BC é tangente à circunferência trigonométrica no ponto E;
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox e o ponto B pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo EOA, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

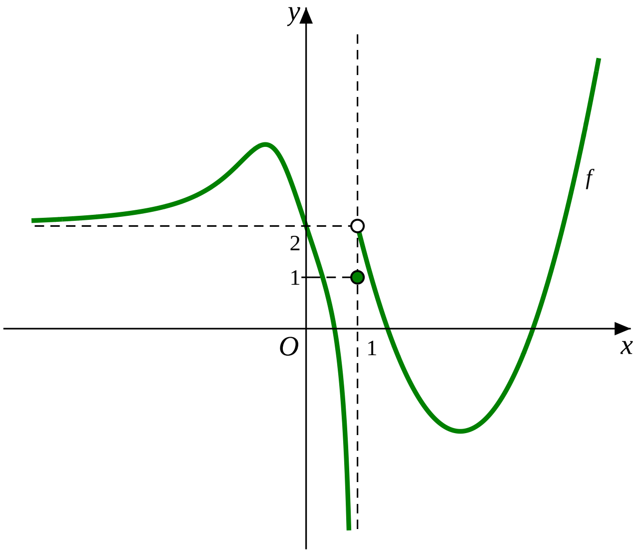
Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função, de α por $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} - \operatorname{tg}\alpha$.

5. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}}$, com $k \in \mathbb{R}^+$ e a função f, definida em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = \ln x$.

Sabendo que $\lim f(u_n) = 1-k$, qual é o valor de k?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

6. Na figura está representado, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como a figura sugere, as retas de equações $y=2$ e $x=1$ são assíntotas ao gráfico de f e $f(1)=1$.

Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = \ln(n) - \ln(n+1)$

Qual é o valor de $\lim f(1-w_n)$?

A $-\infty$

B 0

C 1

D 2

7. Sejam f e g duas funções diferenciáveis de domínio $\mathbb{R}$, relativamente às quais se sabe que:

- a reta de equação $y+3=2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - 2x \right) = 0$;
- 1 é o mínimo absoluto de f';
- $g(x) = e^{x-2}\left(f(x) + 1 \right)$.

Considera as seguintes afirmações.

(I) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$.

(II) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$.

(III) O gráfico da função g tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$.

Justifica que as três afirmações são falsas.

Na tua resposta, apresenta, para cada uma das afirmações, uma razão que justifica a sua falsidade.

Mais itens: itens 5 e 13 da *newsletter* de novembro de 2024 (*Word* e PDF) e itens 2 a 10 da *newsletter* de março de 2024 (*Word* e PDF).

Propostas de resolução

Funções

1. Tem-se que $D=\{x\in\mathbb{R}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-3 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\}=]0,3[$.

Neste domínio, tem-se:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 2}}$$

$$\boxed{i)\ \log_4 2=\log_4\left(\sqrt{4}\right)=\log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}}$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_4 x$$

$$\Leftrightarrow\log_4(x+3)+\log_4 x\geq\log_4(6-2x)$$

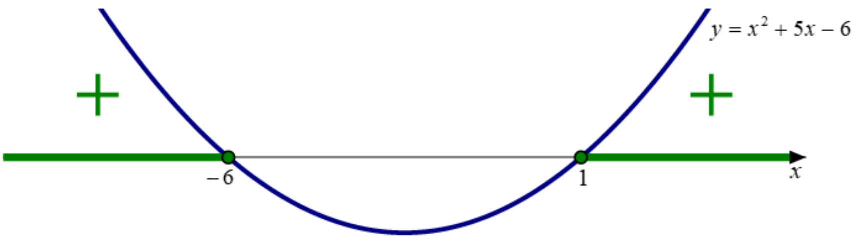
$$\Leftrightarrow\log_4\left(x(x+3)\right)\geq\log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x\geq 6-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-6\geq 0$$

Cálculo auxiliar: $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$

O gráfico da função definida por $y=x^2+5x-6$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



Logo, $x^2+5x-6\geq 0\Leftrightarrow x\leq-6 \ \vee \ x\geq 1$, pelo que o conjunto solução da inequação dada é:

$$\left(]-\infty,-6]\cup[1,+\infty[\right)\cap]0,3[=[1,3[$$

2. A função g é contínua em $\left[-1,+\infty\right[$, pelo que é contínua em $x=k$ e, portanto,

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^+} g(x)=g(k)$$

Assim:

- $\lim\limits_{x\to k^+} g(x)=\lim\limits_{x\to k^+} x=k$

- $g(k)=k$

- $\lim\limits_{x\to k^-} g(x)=\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{xe^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{\dfrac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\dfrac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\lim\limits_{x\to k^-}\dfrac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}}\underset{\substack{y=x-k\Leftrightarrow x=y+k\\ \text{Logo, } k-x=-(x-k)=-y\\ x\to k^-\Rightarrow y\to 0^-}}{=}\dfrac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{(y+k)e^y-k}{y}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen}(-y)}{y}}=$

$$\underset{\substack{\operatorname{sen}(-y)=-\operatorname{sen} y\\ \text{A função seno}\\ \text{é ímpar}}}{=}\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{ye^y+ke^y-k}{y}}{-\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite notável}}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{\cancel{y}e^y}{\cancel{y}}+\lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{k\left(e^y-1\right)}{y}}{-1}=-e^0-k\times\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}=-1-k\times 1=-1-k$$

Logo, $-1-k=k\Leftrightarrow -1=2k\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$.

3. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(\operatorname{sen}^2 x-2\cos x\right)'=2\operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen} x\right)'+2\operatorname{sen} x=\underbrace{2\operatorname{sen} x\cos x}_{\operatorname{sen}(2x)}+2\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x$

- $h''(x)=\left(\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x\right)'=(2x)'\cos(2x)+2\cos x=2\cos(2x)+2\cos x$

- $h''(x)=0\Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0\Leftrightarrow \cancel{2}\cos(2x)=-\cancel{2}\cos x\Leftrightarrow \cos(2x)=\underbrace{-\cos x}_{\cos(\pi+x)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(\pi+x)\Leftrightarrow 2x=\pi+x+2k\pi\ \vee\ 2x=-(\pi+x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ \vee\ 2x=-\pi-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ \vee\ 3x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi\ \vee\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}$; $\pi \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\pi$; $3\pi \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\pi \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=2 \rightarrow x=$ ____ $\vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $-\pi \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Outra maneira de resolver a equação $h''(x)=0$:

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} \underbrace{\cos(2x)}_{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-1+\cos^2 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1 \ \vee \ \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $\pi \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3} \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\frac{7\pi}{3} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $3\pi \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{7\pi}{3} \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{5\pi}{3} \ \vee$ ____ ; $-\pi \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Elaborando um quadro de sinal de h'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de h, vem:

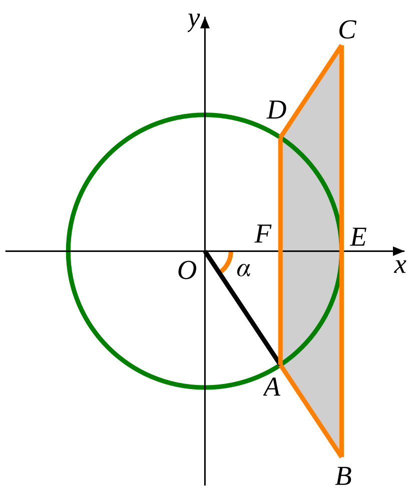
x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$h''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
Gráfico de h		$\cup$	p.i.	$\cap$		$\cap$	

Nota: $h''(0)=2\cos(0)+2\cos(0)=2\times1+2\times1=4\Rightarrow h''(0)>0$; $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(\pi)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times0=-2\Rightarrow h''\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; $h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos(3\pi)+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times0=-2\Rightarrow h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0$.

Logo, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ e tem um único ponto de inflexão em $x=\frac{\pi}{3}$.

Como $h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{1}{4}\right)$.

4. Consideremos a seguinte figura, em que F é o ponto de interseção do lado $[AD]$ com o eixo Ox.



A área do trapézio $[ABCD]$ é dada por $\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}$.

Como $\overline{AD}=2\overline{AF}$, $\overline{BC}=2\overline{BE}$ e $\overline{EF}=1-\overline{OF}$, tem-se que:

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{EF}=\frac{2\overline{AF}+2\overline{BE}}{2}\times\left(1-\overline{OF}\right)=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)$$

As coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, com $\cos\alpha>0$ e $\operatorname{sen}\alpha<0$, e as do ponto B são $(1,\operatorname{tg}\alpha)$, com $\operatorname{tg}\alpha<0$. Assim, $\overline{AF}=-\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{BE}=-\operatorname{tg}\alpha$ e $\overline{OF}=\cos\alpha$ e, portanto:

$$A_{[ABCD]}=\left(\overline{AF}+\overline{BE}\right)\left(1-\overline{OF}\right)=(-\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(1-\cos\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha=$$

$$=-\operatorname{sen}\alpha+\frac{\overbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2}-\operatorname{tg}\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\times\cancel{\cos\alpha}=\cancel{-\operatorname{sen}\alpha}+\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}-\operatorname{tg}\alpha+\cancel{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}-\operatorname{tg}\alpha$$

5. Tem-se que $\lim u_n=\lim\left(\frac{n-k}{n+k}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim\left(\left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{\lim\left(1-\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{e^{-k}}{e^k}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(e^{-2k}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{-\frac{2k}{3}}$.

Logo, $\lim f(u_n)\underset{f\text{ é contínua em }\mathbb{R}^+}{=}f(\lim u_n)=f\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right)=\ln\left(e^{-\frac{2k}{3}}\right)=-\frac{2k}{3}$.

Portanto, $\lim f(u_n)=1-k\Leftrightarrow-\frac{2k}{3}=1-k\Leftrightarrow-\frac{2k}{3}+k=1\Leftrightarrow\frac{k}{3}=1\Leftrightarrow k=3$.

Resposta: C

6. Tem-se que $\lim w_n=\lim(\ln(n)-\ln(n+1))=\lim\left(\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)=\ln\left(\lim\frac{n}{n+1}\right)\underset{\substack{n<n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}\\ \Downarrow\\ \frac{n}{n+1}<1,\ \forall n\in\mathbb{N}}}{=}\ln\left(1^-\right)=0^-$.

Logo, $\lim(1-w_n)=1-\lim w_n=1-0^-=1^+$, pelo que $\lim(1-w_n)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2$.

Resposta: D

7.

(I) A reta de equação $y+3=2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2, pelo que o ponto de coordenadas $(2, f(2))$ pertence a esta reta.

Assim, $f(2)+3=2\times 2 \Leftrightarrow f(2)=4-3 \Leftrightarrow f(2)=1$.

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, também é contínua em $x=2$, pelo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$.

Logo, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x-2}\left(f(x)+1\right)\right)=\lim\limits_{x\to 2} e^{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+1\right)=e^{2-2}\times\left(\lim\limits_{x\to 2} f(x)+1\right)=e^{0}\times(1+1)=2$.

∴ A afirmação **(I)** é falsa.

(II) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e 1 é um mínimo absoluto de f', $f'(x)\geq 1$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, o que implica que $f'(x)>0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$, pelo que f é crescente em $\mathbb{R}$.

∴ A afirmação **(II)** é falsa.

(III) Como $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$, a reta de equação $y=2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando x tende para $-\infty$, pelo que $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=2$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^{x-2}\left(f(x)+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x-2}\times\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)+1}{x}=e^{-\infty}\times\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{x}\right)=$

$$=0\times\left(2+\frac{1}{-\infty}\right)=0\times(2+0)=0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x}=0$, se o gráfico de g tiver assíntota, quando x tende para $-\infty$, será horizontal, pelo que não pode ter assíntota oblíqua, quando x tende para $-\infty$.

∴ A afirmação **(III)** é falsa.

FIM