Itens para Avaliação intercalar – Outubro

Matemática A | 12.º Ano

Cotações e Propostas de resolução

TABELA DE COTAÇÕES

Nota ao professor: Caso pretenda utilizar o conjunto de itens apresentados como uma avaliação intercalar, sugere-se a seguinte tabela de cotações:

1.	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	Total
12	12	27	27	27	27	29	27	12	200

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO

1. $\left(A\cup\bar{B}\right)\cap\bar{A}=\underbrace{\left(A\cap\bar{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left(\bar{B}\cap\bar{A}\right)=\varnothing\cup\left(\bar{B}\cap\bar{A}\right)=\bar{B}\cap\bar{A}=\overline{B\cup A}$.

Como $A\subset B$, então $B\cup A=B$, pelo que $\overline{B\cup A}=\bar{B}$.

Resposta: D

2.1 Como o número tem de ser ímpar, o algarismo das unidades tem de ser ímpar, pelo que para esta posição temos 5 possibilidades. Como o primeiro algarismo não pode ser o 0, restam três posições para colocar os dois zeros, o número de maneiras de o fazer é ${}^3C_2$. Finalmente, sobram duas posições que têm de ser ocupadas por dois algarismos distintos entre si, distintos de 0 e do algarismo que foi colocado na posição das unidades. Assim, dos restantes oito algarismos, escolhem-se, ordenadamente, dois para as duas posições que sobram. O número de maneiras de o fazer é ${}^8A_2$.

Logo, uma resposta é $5\times{}^3C_2\times{}^8A_2=840$.

Resposta: A

2.2 Para formarmos um número de cinco algarismos, temos de escolher cinco entre os dez algarismos disponíveis e, em seguida, distribuir os cinco algarismos pelas cinco posições. Contudo, se queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente ou decrescente, depois de os escolher há apenas uma maneira de os distribuir para cada um dos casos (crescente ou decrescente). Por exemplo, se escolhermos os algarismos 1, 4, 6, 7 e 9, forma-se o número $14\,679$, no caso de ficarem por ordem crescente, e forma-se o número $97\,641$, no caso de ficarem por ordem decrescente.

Assim:

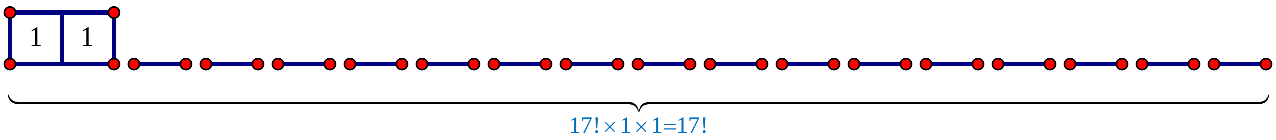
- existem ${}^9C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem crescente. O algarismo 0 não pode ser escolhido, dado que como queremos que os algarismos fiquem por ordem crescente, o 0 teria de ir para a primeira posição, pelo que o número não teria cinco algarismos, mas sim quatro. Portanto, dos restantes nove algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^9C_5\times 1={}^9C_5$ números nestas condições;

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

- existem ${}^{10}C_5$ números de cinco algarismos em que os algarismos estão dispostos por ordem decrescente. Dos dez algarismos escolhem-se cinco, havendo apenas uma maneira de os distribuir, ou seja, existem ${}^{10}C_5 \times 1 = {}^{10}C_5$ números nestas condições.

Logo, existem ${}^{9}C_5 + {}^{10}C_5 = 378$ números de cinco algarismos em que os seus algarismos estão dispostos por ordem crescente ou por ordem decrescente.

3.1 Agrupando os dois vasos num bloco, este bloco e as restantes dezasseis peças perfazem dezassete peças a permutar. Dado que os vasos são iguais, permutando os dois dentro do bloco não gera uma nova disposição, pelo que uma resposta ao problema é $17!$.



3.2 Existem dezassete peças distintas (os dois vasos são iguais, pelo que consideramos apenas um para formar um conjunto de seis peças distintas). Assim, das dezassete peças escolhem-se seis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{17}C_6$.

Portanto, existem ${}^{17}C_6 = 12\,376$ maneiras distintas de escolher seis peças distintas para a exposição.

3.3 Começamos por escolher a fila horizontal onde se vão colocar os dois vasos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_1 = 4$. Para cada uma destas maneiras, existem ${}^{6}C_2$ maneiras distintas de escolher dois compartimentos, entre os seis da fila horizontal escolhida, para os dois vasos. Finalmente, como na fila onde ficam os vasos não podem estar outras peças, dos restantes dezoito compartimentos escolhem-se, ordenadamente, dezasseis. O número de maneiras de o fazer é ${}^{18}A_{16}$.

Logo, uma resposta a este problema é $4 \times {}^{6}C_2 \times {}^{18}A_{16}$.

4. Sejam n o número de cartas vermelhas em cima da mesa e p o número de cartas pretas em cima da mesa (n e p naturais).

Tem-se:

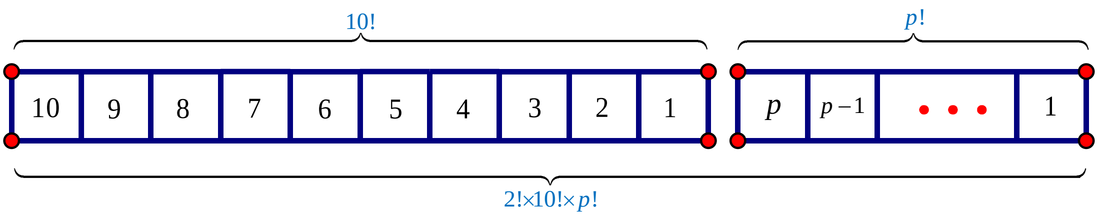
- o número de maneiras de formar um conjunto de duas cartas vermelhas entre as n é dado por ${}^{n}C_2$.

Logo, ${}^{n}C_2 = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-90)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{361}}{2} \Leftrightarrow n = -9 \ \vee \ n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 10$, pelo que foram colocadas em cima da mesa dez cartas vermelhas.

- agrupando num bloco as dez cartas vermelhas e agrupando num outro bloco as p cartas pretas, vem:



Os dois blocos permutam entre si de $2!$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as dez cartas vermelhas permutam entre si de $10!$ maneiras distintas e as p cartas pretas permutam entre si de $p!$ maneiras distintas. Portanto, o número de maneiras de colocar as cartas em fila de modo que as cartas da mesma cor fiquem em posições consecutivas é dado por $2!\times 10!\times p!$.

Portanto, $2!\times 10!\times p! = 174\,182\,400 \Leftrightarrow p! = \dfrac{174\,182\,400}{2!\times 10!} \Leftrightarrow p! = 24 \Leftrightarrow p = 4$

$\therefore$ Em cima da mesa foram colocadas catorze cartas, dez vermelhas e quatro pretas.

5. Tem-se:

$$\underbrace{{}^{n}C_6 + {}^{n}C_7}_{{}^{n+1}C_7} + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow \underbrace{{}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8}_{{}^{n+2}C_8} = {}^{n+2}C_{20} \Leftrightarrow {}^{n+2}C_8 = {}^{n+2}C_{20} \underset{{}^{n}C_p = {}^{n}C_{n-p}}{\Leftrightarrow} n+2-8 = 20 \Leftrightarrow n = 26$$

Logo, a linha n é a linha 26, pelo que a linha $n+1$ é a linha 27 e, portanto, a soma de todos os elementos da linha $n+1$ é $2^{27} = 134\,217\,728$.

6. A forma geral dos termos do desenvolvimento do binómio $\left(\sqrt{x} - \dfrac{a}{x^2}\right)^{19}$ é ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\dfrac{a}{x^2}\right)^p$, com p inteiro e $0 \le p \le 19$.

Assim, ${}^{19}C_p \times \left(\sqrt{x}\right)^{19-p} \times \left(-\dfrac{a}{x^2}\right)^p = {}^{19}C_p \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{19-p} \times (-a)^p \times \dfrac{1}{\left(x^2\right)^p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times \dfrac{x^{\frac{19-p}{2}}}{x^{2p}} =$

$$= {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-p}{2} - 2p} = {}^{19}C_p \times (-a)^p \times x^{\frac{19-5p}{2}}$$

O termo de segundo grau é o termo com parte literal igual a x^2, pelo que, fazendo $\dfrac{19-5p}{2} = 2$, vem $19 - 5p = 4 \Leftrightarrow -5p = -15 \Leftrightarrow p = 3$, pelo que o coeficiente do termo de segundo grau é ${}^{19}C_3 \times (-a)^3$.

Portanto, ${}^{19}C_3 \times (-a)^3 = 7752 \Leftrightarrow -969a^3 = 7752 \Leftrightarrow a^3 = \dfrac{7752}{-969} \Leftrightarrow a^3 = -8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow a = -2$.

Resposta: B