Avaliação diagnóstica

Matemática A | 12.º Ano

Propostas de resolução e de distribuição de pontuações

Apresentam-se, a seguir, propostas de resolução das tarefas de diagnóstico, assim como as respetivas propostas de pontuações dos passos dessas resoluções. Compara o teu trabalho com as resoluções apresentadas e procede à autoavaliação, atribuindo os pontos relativos às tuas resoluções. Em alguns casos, podes ter apresentado resoluções alternativas, mas também corretas, pelo que as deves pontuar de forma equivalente.

Em casos de dúvida, consulta o(a) teu(tua) professor(a).

TEMA: Probabilidades

1. (C) [5 pontos]

2. (A) [5 pontos]

3.1 (B) [5 pontos]

3.2 [14 pontos]

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada: (6 pontos)

	Q	Q	Q	N	N	N
Q		(Q;Q)	(Q;Q)	(Q;N)	(Q;N)	(Q;N)
Q	(Q;Q)		(Q;Q)	(Q;N)	(Q;N)	(Q;N)
Q	(Q;Q)	(Q;Q)		(Q;N)	(Q;N)	(Q;N)
N	(N;Q)	(N;Q)	(N;Q)		(N;N)	(N;N)
N	(N;Q)	(N;Q)	(N;Q)	(N;N)		(N;N)
N	(N;Q)	(N;Q)	(N;Q)	(N;N)	(N;N)	

Q – aluno que leu exatamente 4 livros
N – aluno que não leu exatamente 4 livros

A probabilidade pedida é

$$P = \frac{6}{30} \quad (6\,\text{pontos})$$
$$= 20\% \quad (2\,\text{pontos})$$

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta
Matemática 360 | Matemática A | 12.º ano

4.1.1 [14 pontos]

$15+10+5-25=5$. Há 5 alunos inscritos nas duas disciplinas. (7 pontos)

$P=\frac{5}{25}$ (6 pontos)

$=\frac{1}{5}$ (1 ponto)

4.1.2 [14 pontos]

Número de alunos inscritos apenas em Física: $15-5=10$ (3 pontos)

Número de alunos inscritos apenas em Biologia: $10-5=5$ (3 pontos)

$P=\frac{10+5}{25}$ (7 pontos)

$=\frac{3}{5}$ (1 ponto)

4.2 [14 pontos]

Número de casos possíveis: 10 (há 10 alunos inscritos em Biologia). (5 pontos)

Número de casos favoráveis: 5 (5 desses 10 alunos também estão inscritos em Física). (5 pontos)

$P=\frac{5}{10}$ (1 ponto)

$=\frac{1}{2}$ (1 ponto)

5.1 [14 pontos]

Recorrendo a uma tabela de dupla entrada:

(6 pontos)

+	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

$P=\frac{3}{36}$ (6 pontos)

$\approx 0,08$ (2 pontos)

5.2 [15 pontos]

Existem 36 casos possíveis. (4 pontos)

Para o produto ser ímpar, ambos os números registados têm de ser ímpares. Em cada dado há 3 números ímpares e 3 números pares, logo existem 9 (3×3) casos em que o produto é ímpar.

Assim, a probabilidade de o produto ser ímpar é $P = \frac{9}{36}$ (4 pontos)

A probabilidade de o produto ser par é $P = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36}$ (4 pontos)

Como $\frac{27}{36} > \frac{9}{36}$, o acontecimento mais provável é «o produto dos números registados é par». (3 pontos)

TEMA: Funções

6. (D) [5 pontos]

7.1 (A) [5 pontos]

7.2 (D) [5 pontos]

7.3 (A) [5 pontos]

8.1 (C) [5 pontos]

8.2.1 (C) [5 pontos]

8.2.2 (D) [5 pontos]

9. (C) [5 pontos]

10.1 [6 pontos]

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$ (1 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} =$$ (2 pontos)

$$= 0$$ (3 pontos)

10.2 [6 pontos]

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$ (1 ponto)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$ (2 pontos)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$ (1 ponto)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$ (1 ponto)

$$=-1$$ (1 ponto)

10.3 [6 pontos]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$ (1 ponto)

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$ (3 pontos)

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1$$ (2 pontos)

10.4 [6 pontos]

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{-2}{0^+}=$$ (4 pontos)

$$=-\infty$$ (2 pontos)

11.1 [12 pontos]

$D_f = \mathbb{R}$.

O gráfico da função não tem assíntotas verticais, pois a função é contínua em $\mathbb{R}$. (2 pontos)
Assíntotas não verticais:
Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3-10x}{x^2+3}}{x} = \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3-10x}{x^3+3x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2 \quad \text{(2 pontos)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-10x}{x^2+3} - 2x \right) = \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-16x}{x^2+3} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-16x}{x^2} = 0 \quad \text{(2 pontos)}$$

Para $x \to -\infty$, os cálculos são análogos.
A reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. (2 pontos)

11.2 [12 pontos]

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{3x^2-1}{2-x} = \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to2^-} \frac{11}{0^+} = \quad \text{(1 ponto)}$$

$$= +\infty \quad \text{(1 ponto)}$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico da função g. (1 ponto)

Carlos Andrade | José Carlos Pereira | Pedro Pimenta

Não existem outras assíntotas verticais ao gráfico da função, pois esta é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. (1 ponto)

Assíntotas não verticais:

Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-1}{2-x}}{x} = \qquad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{2x-x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \qquad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = -3 \qquad \text{(1 ponto)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(g(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2-1}{2-x} + 3x\right) = \qquad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-1}{2-x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \qquad \text{(1 ponto)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{-x} = -6 \qquad \text{(1 ponto)}$$

Para $x \to -\infty$, os cálculos são análogos. A reta de equação $y = -3x - 6$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. (1 ponto)

12. [12 pontos]

$D_g = \mathbb{R}$

$g'(x) = -4x^3 + 36x$. (1 ponto)

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 36x = 0$ (1 ponto)

$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = -3 \quad \vee \quad x = 3$ (1 ponto)

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

(5 pontos)

$g(-3) = g(3) = 100$, 100 é o máximo absoluto da função. (1 ponto)

$g(0) = 19$ é um mínimo relativo. (1 ponto)

A função é decrescente em $[-3, 0]$ e em $[3, +\infty[$. (1 ponto)

A função é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[0, 3]$. (1 ponto)

TEMA: Trigonometria e Funções trigonométricas

13. (B) [5 pontos]

14. (B) [5 pontos]

15. (D) [5 pontos]

16. (B) [5 pontos]

17. [10 pontos]

$\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$ (1 ponto)

$\sin(\theta-\pi)=-\sin(\theta)$ (1 ponto)

$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$ (1 ponto)

Como a abcissa do ponto A é $-\frac{2}{3}$, $\cos(\theta)=-\frac{2}{3}$ (1 ponto)

- $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^2+\sin^2(\theta)=1$ (1 ponto)

  $\underset{\theta\in 2.^o Q}{\Leftrightarrow} \sin(\theta)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ (1 ponto)

- $\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow \tan(\theta)=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}$ (1 ponto)

  $\Leftrightarrow \tan(\theta)=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ (1 ponto)

- $\cos(\pi+\theta)-\sin(\theta-\pi)+\tan(-\theta)=-\cos(\theta)+\sin(\theta)-\tan(\theta)$ (1 ponto)

  $=-\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{\sqrt{5}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{4+5\sqrt{5}}{6}$ (1 ponto)

18.1 [10 pontos]

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-1=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}$ (2 pontos)

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{3}+x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$ (3 pontos)

$\Leftrightarrow x=2k\pi \ \vee \ x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ,k\in\mathbb{Z}$ (2 pontos)

Em $[-\pi, \pi]$, $x=0 \ \vee \ x=-\frac{2\pi}{3}$ (3 pontos)

18.2 [10 pontos]

$$f(x)=-2 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-1=-2 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-\frac{1}{2} \quad \text{(2 pontos)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{3}+x=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{(3 pontos)}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{(2 pontos)}$$

Em $[-\pi,\pi]$, $x=\frac{\pi}{3} \ \vee \ x=-\pi \ \vee \ x=\pi$ (3 pontos)

18.3 [10 pontos]

Seja P o período fundamental da função.

$$P=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi \quad \text{(10 pontos)}$$

19. [10 pontos]

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\times\sin(\pi+x)=1 \Leftrightarrow -2\sin(x)\times(-\sin(x))=1 \quad \text{(2 pontos)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(x)=1 \Leftrightarrow \sin(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{(3 pontos)}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \quad \text{(2 pontos)}$$

$$\underset{x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} x=-\frac{\pi}{4} \ \vee \ x=\frac{\pi}{4} \ \vee \ x=\frac{3\pi}{4} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{4} \quad \text{(3 pontos)}$$

TEMA: Geometria analítica

20. (A) [5 pontos]

21. (D) [5 pontos]

22. (A) [5 pontos]

23. [10 pontos]

$$r=\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13} \quad \text{(3 pontos)}$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2\le 13 \ \wedge \ x\ge 0 \quad \text{(7 pontos)}$$

24. (B) [5 pontos]