

Itens Para Testes de Avaliação | 2.º Período

MATEMÁTICA A | 12.º ANO

Temas: Probabilidades, Continuidade, Assíntotas, Teorema de Bolzano, Derivadas, Funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

1. Oito amigos, entre os quais o casal Sofia e Carlos, decidiram ir a um concerto. Quando chegaram já só havia quatro bilhetes. Decidiram, então, sortear os quatro bilhetes pelos oito amigos.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, um dos elementos do casal ir ao concerto?

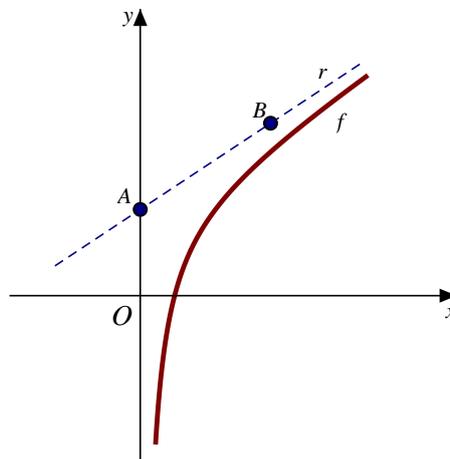
A $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2}{{}^8C_4}$

C $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$

B $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_2 \times 2}{{}^8C_4}$

D $\frac{{}^6C_3 + {}^6C_4}{{}^8C_4}$

2. Na figura, estão representados, em referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} , e a reta r , assíntota ao gráfico de f .



Os pontos A e B pertencem à reta r e as suas coordenadas são, respetivamente, $(0,2)$ e $(3,4)$.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2f(x) - \frac{3(f(x))^2}{x} \right)$?

A 4

B 2

C 0

D -4

3. Considera que para cada k real, a seguinte expressão, definida por ramos, define uma função g , de domínio \mathbb{R} .

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{e^{x+1}} - 1} & \text{se } x < -1 \\ e^{kx}(x^2 - 4x + 1) & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

3.1 Determina o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{e^{2x}}$, para o caso em que $k < 1$.

3.2 Verifica se existe algum k de modo que a função g seja contínua em $x = -1$.

3.3 Considera $k = -1$.

Estuda, para $x \in]-1, +\infty[$, a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na tua resposta deves indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

4. Sejam a e x dois números reais, com $a > 0$, tais que $\log_5 a = x$.

A expressão $\log_5 \left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x} \right)$ é equivalente a:

A $-x^2 + \frac{3x}{2} - 1$

C $x^2 - \frac{3x}{2} + 1$

B $\frac{x}{2} - 1$

D $-\frac{x}{2} + 1$

5. Sejam f e g duas funções, de domínio \mathbb{R} e \mathbb{R}^+ , respetivamente, tais que:

- f é contínua em \mathbb{R} ;
- $f(0) = f(1) = 3$ e $0 < f(3) < 1$;
- $g(x) = \log_3 x$.

Mostra que a equação $(g \circ f)(x) = (f \times g)(x)$ é possível no intervalo $]1, 3[$.

6. Considera a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x^2 \ln x - 2$.

6.1 Verifica se o gráfico da função f tem alguma assíntota vertical. Se tiver, indica a(s) sua(s) equação(ões).

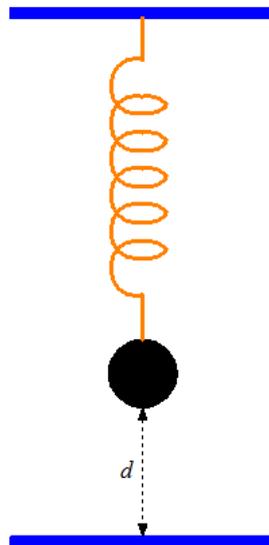
6.2 Determina o conjunto-solução da equação $f(x) + x^2 = 2 \ln x$.

6.3 Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta debes:

- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo;
- indicar o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

7. Na figura, está representada uma esfera suspensa numa mola que oscila verticalmente.



Admite que a distância, em centímetros, a que a esfera se encontra do solo, t segundos após o início do movimento oscilatório, é dada pela função d , definida por:

$$d(t) = 3 + 3,5e^{-0,31t} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right), \text{ com } t \geq 0$$

7.1 Admite que, no início do movimento, a distância do centro da esfera ao solo é de 3,5 cm.

Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera?

A $\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{4}$

C $\frac{\pi}{3}$

D $\frac{\pi}{2}$

7.2 Durante o terceiro segundo de movimento, existem exatamente dois instantes tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15% .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determina esse instante.

Na tua resposta debes:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerares necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s), com três casas decimais;
- apresentar os instantes pedidos, em segundos, arredondado às décimas.

8. Sejam f e g duas funções de domínio \mathbb{R} e $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, respetivamente, tais que:

- f é diferenciável em \mathbb{R} ;
- a função f tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1;

▪ $g(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2)}{1 - \cos^2(2x)} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x + f(x)}{x + 2} & \text{se } x > 0 \end{cases};$

- existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

8.1 Qual é o valor de $f(0)$?

8.2. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

9. Considera a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \cos^2(2x) - 2$ e um número real a pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

A que é igual $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{h(a)-h(x)}$?

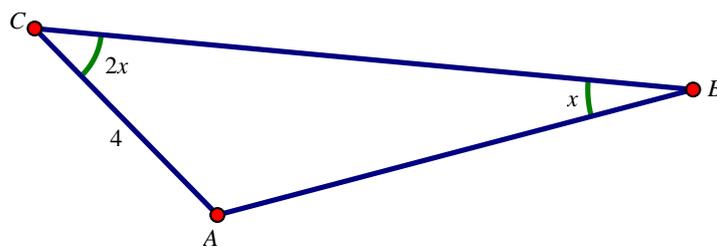
A $\frac{1}{2\text{sen}(2a)}$

C $-\frac{1}{2\text{sen}(4a)}$

B $\frac{1}{2\text{sen}(4a)}$

D $-\frac{1}{2\text{sen}(2a)}$

10. Na figura, está representado o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 4$;
- a amplitude, em radianos, do ângulo CBA é x e a do ângulo ACB é $2x$, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

Mostra que a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$ é dada por:

$$12\text{sen } x - 16\text{sen}^3 x$$

FIM

Sugestão de cotações

1.	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	8.1	8.2	9.	10.	Total
10	10	14	14	14	10	13	14	14	14	10	13	13	14	10	13	200

Propostas de resolução

1. O número de casos possíveis é 8C_4 , que é o número de maneiras de escolher quatro amigos entre os oito. Para o número de casos favoráveis, ao total de possibilidades de escolher quatro amigos, retiram-se todos os grupos de quatro em que os dois membros do casal não estejam presentes. Para isso, escolhem-se dois amigos entre os restantes seis (excluindo o casal), sendo o número de maneiras de o fazer é 6C_2 . Assim, o número de casos favoráveis é ${}^8C_4 - {}^6C_2$, pelo que a probabilidade pedida é $\frac{{}^8C_4 - {}^6C_2}{{}^8C_4}$.

Resposta: C

2. O declive da reta r é dado por $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{3 - 0} = \frac{2}{3}$. Como o ponto de coordenadas $(0, 2)$ pertence à reta r , a sua ordenada na origem é 2, pelo que a equação reduzida da reta r é $y = \frac{2}{3}x + 2$.

Logo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{3}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{2}{3}x \right) = 2$, pelo que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2f(x) - \frac{3(f(x))^2}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xf(x) - 3(f(x))^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3f(x) \left(f(x) - \frac{2}{3}x \right)}{x} = \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{2}{3}x \right) = -3 \times \frac{2}{3} \times 2 = -4 \end{aligned}$$

Resposta: D

$$3.1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{kx}(x^2 - 4x + 1)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{e^{2x} \times e^{-kx}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{e^x \times e^x \times e^{-kx}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{e^{x-kx}} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Limite notável}}} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{e^{x(1-k)}} \quad k < 1 \Rightarrow 1 - k > 0 = \frac{1}{+\infty} \times \frac{1 - \frac{4}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}}{e^{+\infty}}$$

$$= 0 \times \frac{1 - 0 + 0}{+\infty} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$$

3.2 A função g é contínua em $x = -1$ se $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = g(-1)$.

- $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (e^{kx} (x^2 - 4x + 1)) = e^{-k} ((-1)^2 - 4 \times (-1) + 1) = e^{-k} (1 + 4 + 1) = 6e^{-k}$

- $g(-1) = e^{-k} ((-1)^2 - 4 \times (-1) + 1) = e^{-k} (1 + 4 + 1) = 6e^{-k}$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{e^{x+1} - 1}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{(e^{x+1})^{\frac{1}{2}} - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{e^{\frac{x+1}{2}} - 1} \times \lim_{x \rightarrow -1^-} (x-2) =$

$$= \lim_{\substack{y = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow x+1=2y \\ x \rightarrow -1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-}} \frac{2y}{e^y - 1} \times (-1 - 2) = 2 \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times (-3) = 2 \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Limite notável}}} \times (-3) = 2 \times \frac{1}{1} \times (-3) = -6$$

Assim, $6e^{-k} = -6 \Leftrightarrow e^{-k} = -1$, que é uma equação impossível em \mathbb{R} , pelo que não existe k de modo que a função g seja contínua em $x = -1$.

i) $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$. Logo, $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.

3.3 Para $k = -1$ e $x \in]-1, +\infty[$, tem-se $g(x) = e^{-x} (x^2 - 4x + 1)$.

Tem-se:

- $g'(x) = (e^{-x})' (x^2 - 4x + 1) + e^{-x} (x^2 - 4x + 1)' = -e^{-x} (x^2 - 4x + 1) + e^{-x} (2x - 4) =$

$$= e^{-x} (-x^2 + 4x - 1) + e^{-x} (2x - 4) = e^{-x} (-x^2 + 4x - 1 + 2x - 4) = e^{-x} (-x^2 + 6x - 5)$$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} (-x^2 + 6x - 5) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \vee -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times (-1) \times (-5)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-6 - 4}{-2} \vee x = \frac{-6 + 4}{-2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$$

Fazendo um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g :

x	-1		1		5	$+\infty$
e^{-x}	n.d.	+	+	+	+	+
$-x^2 + 6x - 5$	n.d.	-	0	+	0	-
$g'(x)$	n.d.	-	0	+	0	-
Monotonia e extremos de g	n.d.	\searrow	mín.	\nearrow	máx.	\searrow

Portanto, para $k = -1$ e $x \in]-1, +\infty[$, a função g é decrescente em $] -1, 1[$ e em $[5, +\infty[$ e é crescente em $[1, 5[$. Tem mínimo relativo em $x = 1$ e máximo relativo em $x = 5$.

$$\begin{aligned}
 4. \text{ Tem-se, } \log_5 \left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x} \right) &= \log_5 \left(\sqrt{(5^3)^x} \right) - \log_5 (5a^x) = \log_5 (\sqrt{5^{3x}}) - (\log_5 (5) + \log_5 (a^x)) = \\
 &= \log_5 \left(5^{\frac{3x}{2}} \right) - (1 + x \log_5 a) \underset{\log_5 a = x}{=} \frac{3x}{2} - 1 - x \times x = -x^2 + \frac{3x}{2} - 1
 \end{aligned}$$

Resposta: A

5. Pretende-se mostrar que existe pelo menos um $c \in]1, 3[$ tal que $(g \circ f)(c) = (f \times g)(c)$, de uma forma equivalente, que existe pelo menos um $c \in]1, 3[$ tal que $(g \circ f)(c) - (f \times g)(c) = 0$.

Seja h , a função definida em $[1, 3]$ por $h(x) = (g \circ f)(x) - (f \times g)(x)$. Vamos mostrar que a função h tem pelo menos um zero em $]1, 3[$.

Tem-se:

- a função h é contínua em $[1, 3]$ por ser o produto, a composição e a diferença entre funções contínuas no seu domínio;

- $h(1) = (g \circ f)(1) - (f \times g)(1) = g(f(1)) - f(1) \times g(1) = g(3) - 3 \times \log_3(1) = \log_3(3) - 3 \times 0 = 1 - 0 = 1$

$\therefore h(1) > 0$;

- $h(3) = (g \circ f)(3) - (f \times g)(3) = g(f(3)) - f(3) \times g(3) = \log_3(f(3)) - f(3) \times \log_3(3) =$

$$= \log_3(f(3)) - f(3) \times 1 = \log_3(f(3)) - f(3)$$

Como $0 < f(3) < 1$, então $\log_3(f(3)) < 0$, pelo que $\underbrace{\log_3(f(3))}_{<0} - \underbrace{f(3)}_{>0} < 0$.

$\therefore h(3) < 0$.

Logo, como $h(1)$ e $h(3)$ têm sinais contrários ($\Rightarrow h(1) \times h(3) < 0$), e como h é contínua em $]1,3[$, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função h tem pelo menos um zero em $]1,3[$, ou seja, existe pelo menos um $c \in]1,3[$ tal que $h(c) = (g \circ f)(c) - (f \times g)(c) = 0$, pelo que a equação dada é possível em $]1,3[$.

6.1 A função f é contínua em \mathbb{R}^+ , por ser o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio, pelo que, se o seu gráfico tiver assíntota vertical, só poderá ser em $x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x - 2) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{\substack{y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty}} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{y} \right)^2 \ln \left(\frac{1}{y} \right) - 2 \right) \stackrel{ii)}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^2} (-\ln y) - 2 \right) = \\ &= -2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y^2} = -2 + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-1}{y} = -2 + 0 \times \frac{-1}{+\infty} = -2 + 0 \times 0 = -2 \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ é finito, o gráfico de f não tem assíntota vertical em $x = 0$, e, portanto, não tem assíntotas verticais.

6.2 O domínio de validade da equação é \mathbb{R}^+ .

Tem-se $f(x) + x^2 = 2 \ln x \Leftrightarrow x^2 \ln x - 2 + x^2 = 2 \ln x \Leftrightarrow x^2 \ln x + x^2 = 2 \ln x + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 (\ln x + 1) = 2(\ln x + 1) \Leftrightarrow x^2 (\ln x + 1) - 2(\ln x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x + 1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \vee x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = e^{-1} \vee x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Como $-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{e} \in \mathbb{R}^+$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$, o conjunto-solução da equação é $\left\{ \frac{1}{e}, \sqrt{2} \right\}$.

6.3 Tem-se:

- $f'(x) = (x^2 \ln x - 2)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' - 0 = 2x \ln x + x^{\cancel{x}} \times \frac{1}{\cancel{x}} = 2x \ln x + x$
- $f''(x) = (2x \ln x + x)' = (2x \ln x)' + x' = (2x)' \ln x + 2x (\ln x)' + 1 = 2 \ln x + 2\cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} + 1 = 2 \ln x + 3$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = -3 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$

Fazendo um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f :

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d.	-	0	+
Gráfico de f	n.d.	\cap	p.i.	\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e^{-\frac{3}{2}}]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty[$. Tem ponto de inflexão em $x = e^{-\frac{3}{2}}$, cuja ordenada é:

$$f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} - 2 = e^{-3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{3e^{-3}}{2} - 2$$

Portanto, as coordenadas do ponto de inflexão são $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3e^{-3}}{2} - 2\right)$.

7.1 No início do movimento a distância da esfera ao chão é dada por:

$$d(0) = 3 + 3,5e^{-0,31 \times 0} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi \times 0}{3}\right) = 3 + 3,5e^0 \operatorname{sen}(0) = 3 + 3,5 \times 1 \times 0 = 3 + 0 = 3$$

Como a distância do centro da esfera ao chão no início do movimento é igual a 3,5 cm, a medida do comprimento do raio da esfera é igual a $3,5 - d(0) = 3,5 - 3 = 0,5$ cm.

Portanto, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera é igual a:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi \times \text{raio}^3 = \frac{4}{3} \pi \times (0,5)^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} = \frac{4\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

Resposta: A

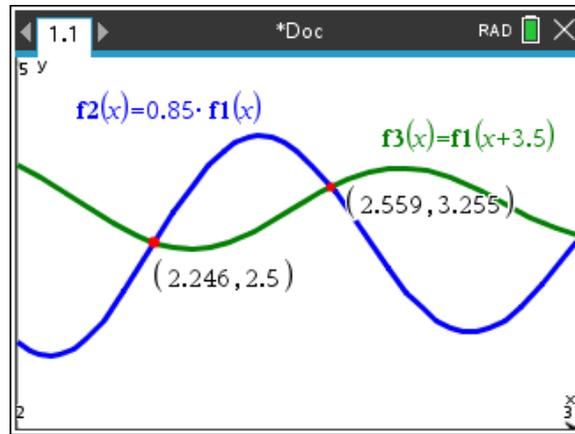
7.2 Sabemos que, durante o terceiro segundo de movimento, existem dois instantes, t_1 e t_2 , tais que, passados três segundos e meio após cada um, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Tem-se que $d(t)$ é a distância da bola ao solo num certo instante t e que $d(t+3,5)$ é a distância da bola ao solo três segundos e meio após o instante t .

Assim, pretende-se terminar os instantes $t \in [3,4]$ tais que:

$$d(t+3,5) = d(t) - 0,15d(t) \Leftrightarrow d(t+3,5) = 0,85d(t)$$

Utilizando o editor de função da calculadora gráfica, definem-se as funções $y_1 = d(t+3,5)$ e $y_2 = 0,85d(t)$:



Portanto, $d(t+3,5) = 0,85d(t) \Leftrightarrow t = t_1 \vee t = t_2$, em que $t_1 \approx 2,2$ e $t_2 \approx 2,6$.

Nota: foi usada a calculadora gráfica TI n-spire, em que $f_1(x) = 3 + 3,5e^{-0,31x} \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi x}{3}\right)$.

8.1 Como existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ($0 \notin D_g$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1 - \cos^2(2x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \times \frac{(2x)^2}{\operatorname{sen}^2(2x)} \times \frac{x^2}{(2x)^2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{4x^2} \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{\substack{y=x^2 \text{ e } z=2x \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow 0^+ \text{ e } z \rightarrow 0^-}} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{\left(\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right)^2} \times \frac{1}{4} \\ &= 1 \times \frac{1}{1^2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + f(x)}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2)} = \frac{2 \times 0 + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{0 + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{2}.$$

Como f é diferenciável em \mathbb{R} , então é diferenciável em $x=0$, o que implica que f é contínua em $x=0$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\text{Logo, } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{2} = \frac{f(0)}{2} \text{ e, portanto, } \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow f(0) = \frac{2}{4} \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2}.$$

8.2 Como a função f é diferenciável em \mathbb{R} , o que implica que também o é em $x=1$, e como tem um extremo relativo igual a 2 no ponto de abcissa 1, então $f'(1)=0$ e $f(1)=2$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Assim, o declive da reta t é dado por $g'(1)$ e o ponto de coordenadas $(1, g(1))$ pertence ao gráfico de g .

$$\begin{aligned} \text{Assim, } g'(x) &= \left(\frac{2x + f(x)}{x + 2} \right)' = \frac{(2x + f(x))'(x + 2) - (2x + f(x))(x + 2)'}{(x + 2)^2} = \\ &= \frac{(2 + f'(x))(x + 2) - (2x + f(x)) \times 1}{(x + 2)^2} = \frac{(2 + f'(x))(x + 2) - 2x - f(x)}{(x + 2)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, o declive da reta } t \text{ é igual a } g'(1) = \frac{(2 + f'(1))(1 + 2) - 2 \times 1 - f(1)}{(1 + 2)^2} = \frac{(2 + 0) \times 3 - 2 - 2}{3^2} = \frac{6 - 4}{9} = \frac{2}{9},$$

pelo que a equação reduzida da reta t é da forma $y = \frac{2}{9}x + b$.

Como $g(1) = \frac{2 \times 1 + f(1)}{1 + 2} = \frac{2 + 2}{3} = \frac{4}{3}$, substituindo as coordenadas $(1, g(1))$ na equação de t :

$$\frac{4}{3} = \frac{2}{9} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{4}{3} - \frac{2}{9} \Leftrightarrow b = \frac{10}{9}$$

$$\therefore t: y = \frac{2}{9}x + \frac{10}{9}$$

9. Tem-se que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{h(x)-h(a)} = -\frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a}} \stackrel{h \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}}{=} -\frac{1}{h'(a)}$.

Tem-se $h'(x) = (\cos^2(2x) - 2)' = 2\cos(2x) \times (\cos(2x))' - 0 = 2\cos(2x) \times (-2) \times \sin(2x) =$
 $= -2 \times \underbrace{2\sin(2x)\cos(2x)}_{=\sin(2 \times 2x)} = -2\sin(4x)$

Logo, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{h(x)-h(a)} = -\frac{1}{h'(a)} = -\frac{1}{-2\sin(4a)} = \frac{1}{2\sin(4a)}$.

Resposta: B

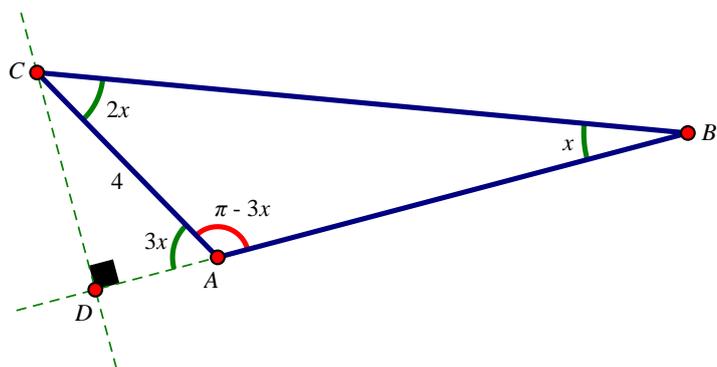
10. Na figura seguinte, o segmento de reta $[CD]$ é a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao lado $[AB]$.

Pretende-se, então, mostrar que:

$$\overline{CD} = 12\sin x - 16\sin^3 x$$

Tem-se que a amplitude do ângulo BAC é $\pi - 2x - x = \pi - 3x$, pelo que a amplitude do ângulo CAD é:

$$\pi - (\pi - 3x) = \pi - \pi + 3x = 3x$$



Logo $\sin(3x) = \frac{\overline{CD}}{4} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4\sin(3x)$.

Portanto, $\overline{CD} = 4\sin(3x) \stackrel{3x=2x+x}{=} 4\sin(2x+x) = 4(\sin(2x)\cos x + \sin x\cos(2x)) =$

$$= 4 \left(2\sin x \cos x \cos x + \sin x \left(\underset{=1-\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \right) \right) = 4 \left(\underset{=1-\sin^2 x}{2\sin x \cos^2 x} + \sin x(1 - 2\sin^2 x) \right)$$

$$= 4(2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x) = 4(2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x)$$

$$= 4(3\sin x - 4\sin^3 x) = 12\sin x - 16\sin^3 x$$

FIM