1. $\lim a_n = e^-$

$\lim f(a_n) \lim\limits_{x\to e^-} f(x) = +\infty$

Opção (D)

2. $\log_a\left(ab^3\right) = 3 \Leftrightarrow \log_a(a) + \log_a\left(b^3\right) = 3 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a(b) = 3 \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{2}{3}$

$$\log_b\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \log_b(a) - \log_b\left(\sqrt{b}\right) = \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_a(b)} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Opção (B)

3.1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2 + 1e^{1-1} = 2 + 1 = 3$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{ke^{x-1}-k}{x-x^2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{-x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{k}{-x} \times \lim_{x\to 1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} =$$

$$= -k \times \lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y} = -k \times 1 = -k$$

M.V.

$x \to 1^+$

$x - 1 \to 0^+$

$y = x - 1$

f é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$-k = 3 \Leftrightarrow k = -3$

3.2. $m = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2+xe^{x-1}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{2}{x} + e^{x-1}\right) = 0$

$$b = \lim_{x\to -\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(2 + xe^{x-1}\right) = 2 + \lim_{x\to -\infty}\left(xe^{x-1}\right)$$

$$= 2 + \lim_{y\to +\infty}\left(-ye^{-y-1}\right) = 2 - \lim_{y\to +\infty}\frac{y}{e^{y+1}} = 2 - \frac{1}{e}\lim_{y\to +\infty}\frac{y}{e^y}$$

$$= 2 + \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to +\infty}\frac{e^y}{y}} = 2 + \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} = 2 + 0 = 2$$

M.V.

$x \to -\infty$

$-x \to +\infty$

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$

$y = 2$ é a equação da assintota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

4. $f(x) < 0 \Leftrightarrow e^x + 6e^{-x} - 5 < 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{6}{e^x} - 5 < 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 5e^x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow e^x > 2 \wedge e^x < 3$

$\Leftrightarrow x > \ln 2 \wedge x < \ln 3$

$\Leftrightarrow x \in \left]\ln 2, \ln 3\right[$

C. Aux: $\left(e^x\right)^2 - 5e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\times 1\times 6}}{2\times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = 3$

5. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{-(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{-(x+1)}$$

$$=f'(1)\times\frac{1}{-(1+1)}=f'(1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

Cálculo auxiliar:

$$f'(x)=\left(-x+\ln(1+3x)\right)'=-1+\frac{3}{1+3x}$$

$$f'(1)=-1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

Opção (B)

6.1 $f(x)=x.e^{2-x}$

$$f'(x)=\left(x.e^{2-x}\right)'=1.e^{2-x}-xe^{2-x}=e^{2-x}(1-x)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{2-x}(1-x)=0\ \Leftrightarrow\ \underbrace{e^{2-x}=0}_{\substack{eq.impossível\\ e^{2-x}>0,\forall x\in R}}\vee 1-x=0\Leftrightarrow x=1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	–
Variação de f	↗	M	↘

f é crescente em $]-\infty,1]$

f é decrescente em $[1,+\infty[$

f tem um máximo em $x=1$ de valor $f(1)=e$.

6.2 Queremos mostrar que os gráficos de f e de g se intersetam em pelo menos um ponto com abcissa pertencente ao $]1,\ 2[$, isto é $\exists x\in\,]1,\ 2[\,:f(x)=g(x)$

Ora $f(x)=g(x)\Leftrightarrow xe^{2-x}=x^2\Leftrightarrow xe^{2-x}-x^2=0\Leftrightarrow h(x)=0$ para $h(x)=xe^{2-x}-x^2$.

h é contínua em $\mathbb{R}$ porque é a diferença de duas funções contínuas, em particular, h é contínua no intervalo $[1,\ 2]$.

$h(1)=e-1>0$ pois $e>1$

$h(2)=2e^0-2^2=2-4=-2<0$

Como h é contínua em $[1,\ 2]$ e $h(2)<0<h(1)$, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists x\in\,]1,\ 2[\,:h(x)=0$, ou seja , $\exists x\in\,]1,\ 2[\,:f(x)=g(x)$.

6.3. $P\left(x, xe^{2-x}\right)$

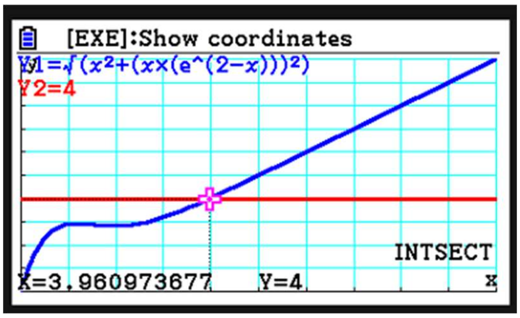
$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + \left(xe^{2-x}\right)^2}$

Queremos determinar $x > 0$: $\sqrt{x^2 + \left(xe^{2-x}\right)^2} = 4$

$y_1 = \sqrt{x^2 + \left(xe^{2-x}\right)^2}$

$y_2 = 4$

A abcissa de P é $x = 3{,}96$.



7. $g''(x) = -f(x) \times \left(x^2 - 4\right)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) \times \left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-f(x) = 0}_{\substack{\text{eq. impossível} \\ f(x)>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}} \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$-f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$
Sinal de g''	$-$	0	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$
Variação de g'	↘	m	↗	M	↘

Opção (D)

8. $D = \mathbb{R}^+$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_a\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = a^0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$ logo $B(1,0)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \log_a(x) = 0 \Leftrightarrow \log_a(x) = -1 \Leftrightarrow x = a^{-1} = \frac{1}{a}$ logo $A\left(\frac{1}{a}, 0\right)$

$\overline{AB} = 1 - \frac{1}{a}$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_a\left(x^2\right) = 1 + \log_a(x) \Leftrightarrow \log_a\left(x^2\right) = \log_a a + \log_a(x)$

$\Leftrightarrow \log_a\left(x^2\right) = \log_a(ax) \Leftrightarrow x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax = 0 \Leftrightarrow x(x-a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = a$

$\underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = a$

$f(a) = \log_a a^2 = 2$

$\text{Área} = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{a}\right) \times 2}{2} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a}$ c.q.m