Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de prova global [maio de 2024]

Nome:____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

Nota: As questões assinaladas com * contribuem obrigatoriamente para a classificação da prova. Dos restantes 6 itens, apenas contribuem para a classificação os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

COMPLEXOS

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

✱ **1.** Seja a um número natural.

Qual é o limite da sucessão (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{2n-a}{2n}\right)^n$?

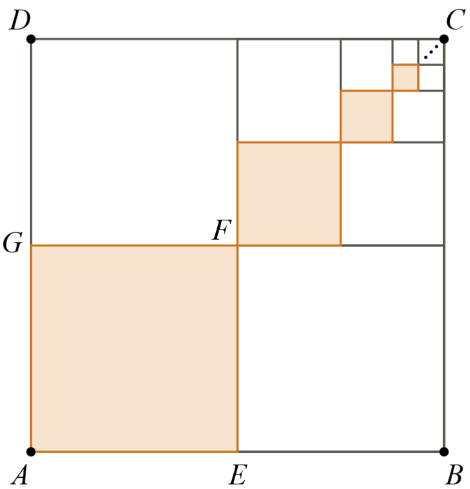
(A) $\frac{1}{\sqrt{e^a}}$ **(B)** $\frac{1}{e^a}$ **(C)** 1 **(D)** $\sqrt{e^a}$

2. Na figura estão representados a sombreado os quatro primeiros quadrados de uma sequência infinita de quadrados, sendo $[AEFG]$ o 1.º termo da sequência.

Cada quadrado é obtido a partir da divisão de um quadrado em quatro quadrados iguais, unindo os pontos médios dos lados opostos, sendo a parte inferior esquerda representada a sombreado.

O termo seguinte é obtido repetindo o processo em relação ao quadrado não adjacente ao sombreado.

Fixada uma unidade, sabe-se que a área do quadrado $[ABCD]$ é 36.



Mostra que a soma das áreas de n quadrados assim obtidos é inferior a 12 unidades, qualquer que seja o valor de n.

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}-1}{-2x^2+3x-1} & \text{se } x<1 \\ 7\times 2^{x-1}-8 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

Resolve os itens **3.1.** e **3.2.** sem recorrer à calculadora.

✱ **3.1.** Averigua se a função f é contínua em $x=1$.

3.2. Resolve, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\log_2(f(x)) = x + \log_2 3$.

4. Após a publicação dos resultados das candidaturas ao ensino superior, é usual as escolas analisarem as colocações dos seus alunos.

Na escola X, foi realizada essa análise com o objetivo de organizar uma campanha de promoção do sucesso escolar junto dos alunos mais jovens.

✱ **4.1.** Após a análise das candidaturas no ano letivo 2022/2023 concluiu-se que:

- 75% dos alunos entraram na sua primeira opção de candidatura.
- 10% dos alunos entraram em cursos de Engenharia e não entraram na sua primeira opção de candidatura.
- 6 em cada 10 dos alunos que entraram na sua primeira opção de candidatura, entraram em cursos de Engenharia.

Selecionou-se um aluno ao acaso. Qual é a probabilidade de o aluno não ter entrado num curso de Engenharia?

✱ **4.2.** Com o objetivo de organizar na escola uma mostra de cursos de ensino superior, foram escolhidos, de entre os alunos que ingressaram este ano no ensino superior, 12 alunos, sendo 7 de Engenharia e 5 de Economia. Destes, pretende-se escolher 3 de Engenharia e 2 de Economia para participarem num painel, em que ficarão sentados lado a lado, em posições consecutivas, definindo assim a ordem pela qual farão as suas intervenções. Os restantes elementos ficarão sentados na primeira fila da plateia em 7 lugares consecutivos.

Qual das seguintes expressões representa o número de maneiras diferentes de distribuir os doze elementos pelos doze lugares disponíveis?

(A) ${}^7C_3 \times {}^5C_2 \times 5! + 7!$ **(B)** ${}^7C_3 \times {}^5C_2 \times 5! \times 7!$

(C) ${}^7A_3 \times {}^5A_2 + 7!$ **(D)** ${}^7A_3 \times {}^5A_2 \times 7!$

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (-2x+1)\,\mathrm{e}^{2-x^2} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \ln(\mathrm{e}^x - 1) - 2x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

5.1. Estuda, no intervalo $]-\infty, 0[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determina o valor do(s) extremo(s), caso exista(m).

✱ **5.2.** O gráfico de f admite uma assintota oblíqua quando x tende para $+\infty$. Determina a equação dessa assíntota.

6. Considera a função g, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cuja derivada é definida por $g'(x)=e^x \sin x$.

* **6.1.** Sem recorrer à calculadora, estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na tua resposta, apresenta:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

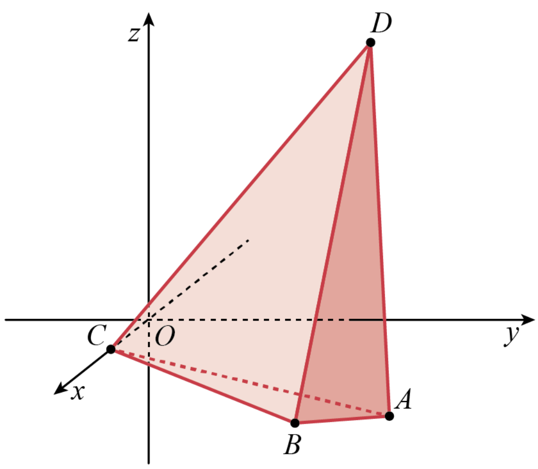
6.2. Mostra, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto, com abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$, tal que a reta tangente ao gráfico de g nesse ponto é perpendicular à reta de equação $y=-\frac{1}{2}x$.

Resolve este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do vértice A são $(-2, 6, -3)$;
- o vértice C pertence ao eixo Ox;
- o plano ABC é definido pela equação $x-4y-10z=4$;
- as coordenadas do vértice D são $(2, 7, 8)$;



* **7.1.** Qual das seguintes equações vetoriais define uma reta paralela ao plano ABC e que passa no ponto D?

(A) $(x, y, z)=(2, 7, 8)+k(1, -4, -10),\ k\in\mathbb{R}$

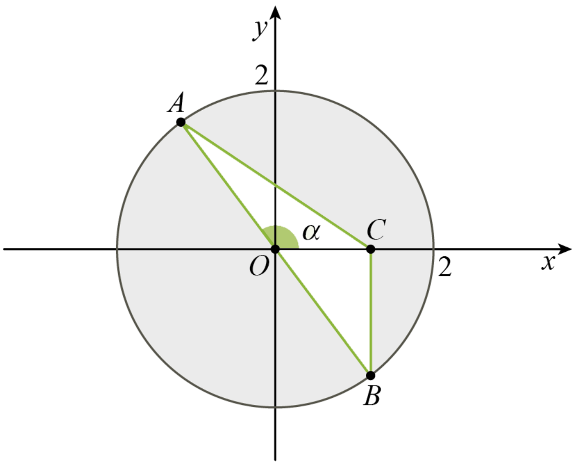
(B) $(x, y, z)=(-6, 5, 7)+k(8, 2, 0),\ k\in\mathbb{R}$

(C) $(x, y, z)=(2, -3, 12)+k(0, -5, 2),\ k\in\mathbb{R}$

(D) $(x, y, z)=(1, -4, -10)+k(2, 7, 8),\ k\in\mathbb{R}$

* **7.2.** Determina a amplitude do ângulo DCA. Apresenta o resultado em graus arredondado às unidades.

8. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro O e raio 2 e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da circunferência;
- a inclinação da reta AB é representada por α, sendo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox;
- a reta BC é paralela ao eixo Oy.

Qual das seguintes expressões representa, em função de α, a área sombreada da figura?

(A) $\pi - \sin(2\alpha)$ **(B)** $\pi + \sin(2\alpha)$ **(C)** $4\pi - 4\sin(2\alpha)$ **(D)** $4\pi + 2\sin(2\alpha)$

9. O *Bungee-jumping* é um desporto radical que consiste em saltar de uma determinada altura, atado a um cabo elástico pelos tornozelos.

Seja h a função que representa a altura, em metros, de um dos praticantes, t segundos após o salto.

Sabe-se que h é definida por $h(t) = 35 + 40e^{-0,2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right), \quad t \geq 0$.

Durante o referido salto, houve um instante, durante os primeiros 6 segundos, tal que, 2 segundos depois, a altura tinha diminuído 40%.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determina esse instante, em segundos, com arredondamento às décimas.

Na resolução, deves apresentar:

– uma equação que traduza o problema;

– num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação, incluindo a janela de visualização;

– a resposta com o arredondamento indicado.

10. Para a disciplina de Matemática do 11.º ano, a Maria e o João realizaram um estudo para determinar as calorias despendidas por cada um na realização de diferentes atividades físicas.

Para algumas das atividades realizadas, cada uma com a duração de 30 minutos, foram recolhidos dados e apresentados na tabela seguinte.

Atividade (30 min)	Maria (60 kg) Calorias (x)	João (80 kg) Calorias (y)
Basquetebol	225	280
Ciclismo	258	334
Dança	145	188
Futebol	225	292
Jardinagem	161	209
Trabalho doméstico	145	188
Saltar à corda	300	400
Musculação	127	162
Hidroginástica	190	250

Admite que é adequado o modelo de regressão linear de y sobre x, obtido a partir dos dados da tabela.

Durante a atividade de caminhada, o relógio da Maria não funcionou, mas sabe-se que o João teve um gasto energético de 167 calorias.

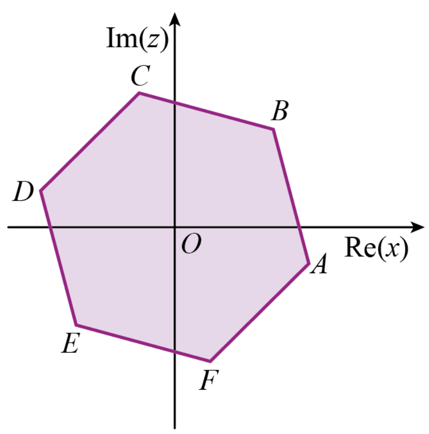
Com base no modelo de regressão linear, faz uma estimativa da energia, em calorias, gasta pela Maria na atividade de caminhada.

Na resposta apresenta:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas;

– o valor pedido, em calorias, arredondado às unidades.

* **11.** Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$.



Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z.

O vértice E tem coordenadas $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice F?

(A) $\sqrt{2}e^{\left(\frac{19\pi}{12}\right)i}$ **(B)** $\sqrt{2}e^{\left(\frac{17\pi}{12}\right)i}$ **(C)** $2e^{\left(\frac{19\pi}{12}\right)i}$ **(D)** $2e^{\left(\frac{17\pi}{12}\right)i}$

12. Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, os números

$$z=\frac{(1-i)^2-i^{25}+1}{1+2i} \text{ e } w=\sqrt{2}e^{\frac{\theta}{2}i}, \text{ sendo } \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

Determina o valor de θ de modo que $\frac{-z}{(\overline{w})^4}$ seja imaginário puro.

✻ **13.** Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\frac{k}{x}$, sendo $k\in\mathbb{R}^+$. Sejam:

- A um ponto qualquer pertencente ao gráfico de g;
- r a reta tangente ao gráfico de g no ponto A;
- B o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox.

Mostra que a área do triângulo $[OAB]$ não depende das coordenadas de A.

Cotações

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.1.</td><td>4.1.</td><td>4.2.</td><td>5.2.</td><td>6.1.</td><td>7.1.</td><td>7.2.</td><td>8.</td><td>9.</td><td>11.</td><td>13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">3.2.</td><td colspan="2">5.1.</td><td colspan="2">6.2.</td><td colspan="2">10.</td><td colspan="2">12.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 x 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">Total</td><td>200</td></tr>
</table>