1. $\lim\left(\frac{2n-a}{2n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{a}{2n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{\frac{a}{2}}{n}\right)^n = e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$

Opção **(D)**

2. A sucessão das áreas dos quadrados estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

A soma das áreas é dada por

$$S_n = 9\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 9\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = 12\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

Como $\forall n\in\mathbb{N},\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n<1$, então $\forall n\in\mathbb{N},\ 12\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)<12$.

3.1. $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x-1}-1}{-2x^2+3x-1} & \text{se } x<1\\ 7\times 2^{x-1}-8 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$

Cálculo auxiliar:

	-2	3	-1
1		-2	1
	-2	1	0

$-2x^2+3x-1=(x-1)(-2x+1)$

Seja: $x-1=y$

Se $x\to 1$, então $y\to 0$

- $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{-2x^2+3x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{(x-1)(-2x+1)} =$

  $= \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{-2x+1}\times\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{(x-1)} =$

  $= -1\times\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = -1\times 1 = -1$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(7\times 2^{x-1}-8\right) = -1$

- $f(1) = 7\times 2^0 - 8 = -1$

A função é contínua em $x=1$.

3.2. $\log_2\left(f(x)\right) = x + \log_2 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_2\left(7\times 2^{x-1} - 8\right) = x + \log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2\left(7\times 2^{x-1} - 8\right) = \log_2 2^x + \log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2\left(7\times 2^{x-1} - 8\right) = \log_2\left(2^x \times 3\right)$

$\Leftrightarrow \frac{7}{2}\times 2^x - 8 = 2^x \times 3 \Leftrightarrow \frac{7}{2}\times 2^x - 2^x \times 3 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\times 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^3$

$\Leftrightarrow x = 4$

$4 \in [1, +\infty[$.

A solução é 4.

4.1. Sejam A e E os acontecimentos:

A: "entrar na primeira opção de candidatura";

E: "entrar em Engenharia".

Sabe-se que $P(A) = 0,75$, $P\left(E \cap \overline{A}\right) = 0,1$ e $P\left(E|A\right) = 0,6$.

	E	$\overline{E}$	
A		$P\left(A \cap \overline{E}\right) = 0,3$	$0,75$
$\overline{A}$	$0,1$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = 0,15$	$0,25$
		$P\left(\overline{E}\right) = 0,45$	1

- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0,75 = 0,25$
- $P\left(A \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{E}|A\right) \times P(A) = \left(1 - P\left(E|A\right)\right) \times P(A) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap E\right) = 0,25 - 0,1 = 0,15$
- $P\left(\overline{E}\right) = P\left(\overline{A} \cap \overline{E}\right) + P\left(A \cap \overline{E}\right) = 0,15 + 0,3 = 0,45$

A probabilidade de o aluno não ter entrado num curso de Engenharia é de 45%.

4.2. ${}^7C_3 \times {}^5C_2 \times 5! \times 7!$

Opção **(B)**

5.1. Para $x < 0$, tem-se:

$$f'(x)=(-2x+1)'\times e^{2-x^2}+(-2x+1)\left(e^{2-x^2}\right)'$$

$$=-2\times e^{2-x^2}+(-2x+1)\times(-2x)\left(e^{2-x^2}\right)$$

$$=\left(-2+4x^2-2x\right)e^{2-x^2}$$

$$=\left(4x^2-2x-2\right)e^{2-x^2}$$

Cálculo auxiliar:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-2x-2\right)e^{2-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \vee x=1$

x		$-\frac{1}{2}$	0
$4x^2-2x-2$	+	0	-
e^{2-x^2}	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

f é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$

f é decrescente em $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$

Máximo: $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2e^{\frac{7}{4}}$

5.2. $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x - 1\right) - 2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x-1\right)}{x} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} - 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{x} - 2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{x} - 2\right) = 1+0-2 = -1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x-1\right) - 2x + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x-1\right) - \ln\left(e^x\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1-\frac{1}{e^x}\right)\right) = \ln(1-0) = 0$$

Assíntota de equação $y = -x$

6.1. $g'(x) = e^x \sin x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g''(x) = \left(e^x \sin x\right)' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x\left(\sin x + \cos x\right)$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow \cos x = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se: $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$		+	0	-	
g					

No intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ a concavidade é voltada para cima.

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ a concavidade é voltada para baixo.

O ponto de abcissa $-\frac{\pi}{4}$ é ponto de inflexão.

6.2. Se a reta tangente ao gráfico nesse ponto é perpendicular à reta $y=-\frac{1}{2}x$, então tem declive 2.

Pretende-se mostrar que a equação $g'(x)=2$ é possível no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$.

$g'(x)=e^x \sin x$, a função g' é contínua no seu domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e g' é contínua em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que g' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

$g'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=e^{-\frac{\pi}{4}} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$ e $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx 2,47$ (é maior do que 2)

g' é contínua em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ e $g'\left(-\frac{\pi}{4}\right)<2<g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[: g'(x)=2$.

7.1. Plano ABC: $x-4y-10z=4$ O vetor $\vec{n}(1, -4, -10)$ é normal ao plano

Na opção **(C)** um vetor diretor da reta é $\vec{u}(0, -5, 2)$.

$\vec{n}.\vec{u}=(1, -4, -10).(0, -5, 2)=0+20-20=0$

O ponto $D(2, 7, 8)$ pertence à da opção **(C)**.

$(2, 7, 8)=(2, -3, 12)+k(0, -5, 2),\ k \in \mathbb{R}$ $\quad \begin{cases} 2+0=2 \\ -3-5k=7 \\ 12+2k=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=2 \\ k=-2 \\ k=-2 \end{cases}$

Opção **(C)** $\quad (x, y, z)=(2, -3, 12)+k(0, -5, 2),\ k \in \mathbb{R}$.

7.2. $\cos\left(D\hat{C}A\right)=\dfrac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}$

O ponto C tem coordenadas $(x,\,0,\,0)$ e pertence ao plano ABC.

$x-0-0=4 \Leftrightarrow x=4$

$C(4,\,0,\,0)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(-2,\,7,\,8)$

$\overrightarrow{CA}=A-C=(-6,\,6,\,-3)$

$$\cos\left(D\hat{C}A\right)=\frac{\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\left\|\overrightarrow{CA}\right\|}=\frac{(-2,\,7,\,8).(-6,\,6,-3)}{\sqrt{4+49+64}\,\sqrt{36+36+9}}=\frac{12+42-24}{9\sqrt{117}}=\frac{10}{3\sqrt{117}}$$

Resposta: $D\hat{C}A\approx 72^{\circ}$

8. Em relação ao triângulo $[OBC]$

$\cos(\pi-\alpha)=\dfrac{\overline{OC}}{2}$ Daqui resulta que: $\overline{OC}=2\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$

$\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{\overline{CB}}{2}$ Daqui resulta que: $\overline{CB}=2\sin(\pi-\alpha)=2\sin\alpha$

Área do triângulo $[OBC]$:

$$\frac{\overline{OC}\times\overline{BC}}{2}=\frac{-2\cos\alpha\times 2\sin\alpha}{2}=-2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin(2\alpha)$$

Em relação ao triângulo $[OCA]$

$\overline{OC}=2\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$

Altura do triângulo $[OCA]$ em relação à base $[OC]$ é igual a $2\sin(\pi-\alpha)=2\sin\alpha$.

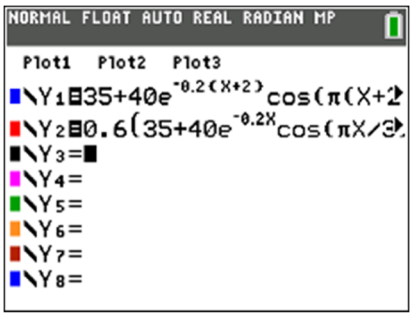
Área do triângulo $[OCA]$: $\dfrac{\overline{OC}\times 2\sin\alpha}{2}=\dfrac{-2\cos\alpha\times 2\sin\alpha}{2}=-\sin(2\alpha)$

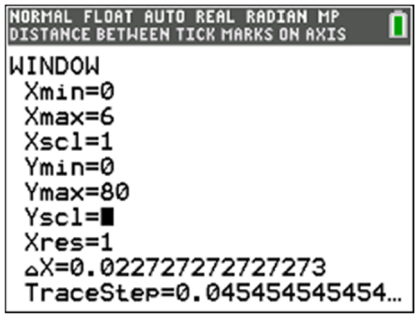
Área sombreada: $4\pi-\left(-\sin(2\alpha)-\sin(2\alpha)\right)=4\pi+2\sin(2\alpha)$

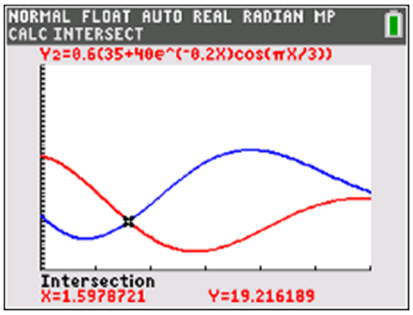
Opção **(D)** $4\pi+2\sin(2\alpha)$

9. Janela de visualização X: [0,6] e Y:[0,80]

$h(t+2)=0,6h(t)\,;\quad t\in[0,6]$

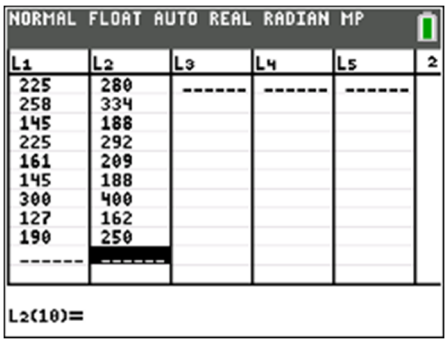


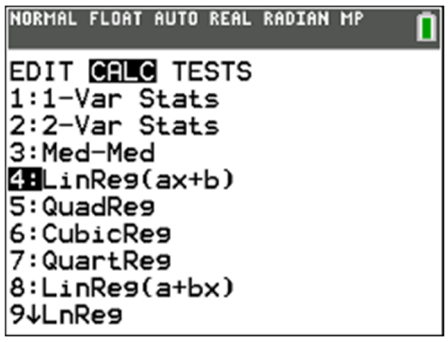


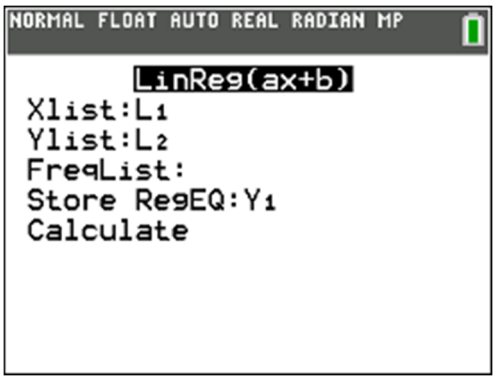


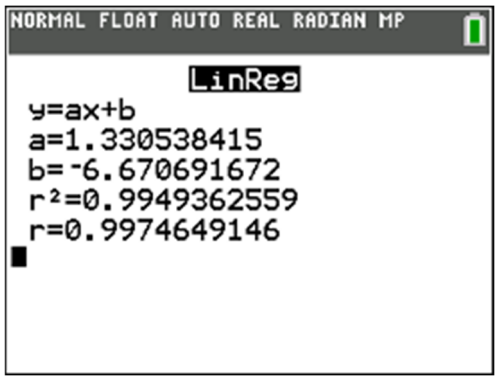
Resposta: 1,6 segundos

10.



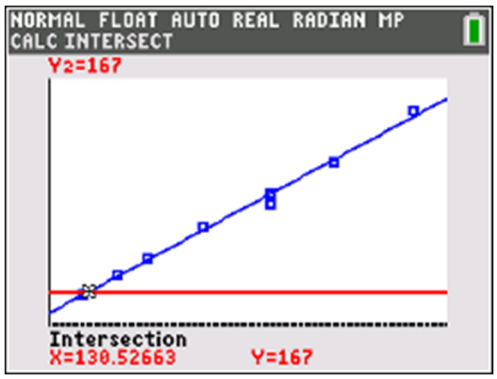






y=ax+b $\quad a\approx 1,33 \quad b\approx -6,67$

Y=1,33x-6,67



Se y=167 o valor de x, arredondado às unidades, é 131.

11. Seja z o número complexo cujo afixo é o ponto $E\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

$z = \rho e^{\theta i}$

$\rho = \left|-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i\right| = \sqrt{2+2} = 2$

$\tan\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 1$, como E pertence ao 3.º quadrante, $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

$z = \rho e^{\theta i} = 2e^{\frac{5\pi}{4}i}$

Seja t o número complexo, cujo afixo é o ponto F.

$t = 2e^{\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{2\pi}{6}\right)i} = 2e^{\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)i} = 2e^{\frac{19}{12}i}$

Opção **(C)** $2e^{\frac{19}{12}i}$

12. $z = \dfrac{(1-i)^2 - i^{25} + 1}{1+2i}$ e $w = \sqrt{2}e^{\frac{\theta}{2}i}$, sendo $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$z = \dfrac{(1-i)^2 - i^{25} + 1}{1+2i} = \dfrac{1-2i-1-i+1}{1+2i} = \dfrac{1-3i}{1+2i}$

$= \dfrac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \dfrac{1-2i-3i-6}{5} = \dfrac{-5-5i}{5} = -1-i$

$z = -1-i$, na forma trigonométrica, $z = \rho e^{\alpha i}$, $\rho > 0$

$\rho = |-1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\tan\alpha = \dfrac{-1}{-1} = 1$ e o afixo de z pertence ao 3.º quadrante.

Então, $\alpha = \pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$.

Assim, tem-se: $\boxed{z=\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}}$

$-z=\sqrt{2}\,e^{\left(\pi+\frac{5\pi}{4}\right)i}=\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}i}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

Sendo $w=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}i}$, tem-se: $\overline{w}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}i}$ e $(\overline{w})^4=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}i}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\mathrm{e}^{-4\frac{\theta}{2}i}=4\mathrm{e}^{-2\theta i}$

Assim, $\dfrac{-z}{(\overline{w})^4}=\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}i}}{4\mathrm{e}^{-2\theta i}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{4}+2\theta\right)i}$.

$\dfrac{-z}{(\overline{w})^4}$ é imaginário puro quando e só quando $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\theta\right)=0$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+2\theta\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}+2\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

Como $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, conclui-se que $\theta=\dfrac{\pi}{8}$.

13. $x\in\mathbb{R}^+$, $k\in\mathbb{R}^+$ e $f(x)=\dfrac{k}{x}$.

Designando a abcissa de A por a, as coordenadas de A são $\left(a,\dfrac{k}{a}\right)$, com $a>0$

$f'(x)=\left(\dfrac{k}{x}\right)'=-\dfrac{k}{x^2}$.

O declive da reta r é igual a $f'(a)$, ou seja, $-\dfrac{k}{a^2}$ (repara que é negativo)

Uma equação da reta r é do tipo: $y=-\dfrac{k}{a^2}x+b$.

O ponto A pertence à reta r. Então, $\dfrac{k}{a}=-\dfrac{k}{a^2}\times a+b$.

Daqui resulta que $b=\dfrac{2k}{a}$.

A reta r é definida pela equação $y=-\dfrac{k}{a^2}x+\dfrac{2k}{a}$

O ponto B tem coordenadas $(b,0)$.

$0=-\dfrac{k}{a^2}b+\dfrac{2k}{a}\Leftrightarrow\dfrac{kb}{a^2}=\dfrac{2k}{a}\Leftrightarrow b=2a$.

Assim, tem-se $A\left(a, \frac{k}{a}\right)$ e $B(2a, 0)$.

A área do triângulo retângulo $[OAB]$ é dada por: $\frac{\overline{OB} \times \frac{k}{a}}{2}$, ou seja, $\frac{2a \times \frac{k}{a}}{2} = k$.

Sendo a área do triângulo $[OAB]$ igual a k (constante), conclui-se que não depende das coordenadas de A.