1. Seja A o acontecimento: "As três cartas ficarem nas caixas correspondentes".

$\overline{A}$: "Colocar no máximo duas cartas nas caixas correspondentes"

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-\frac{1}{{}^{18}A_3}=1-\frac{1}{4896}=\frac{4895}{4896}$$

2. **(I)** é falsa.

Sendo $f\left(3\right)>0$, tem-se:

$$f\left(-4\right)>\frac{1}{f\left(3\right)}\Leftrightarrow f\left(-4\right)\times f\left(3\right)>1\therefore f\left(-4\right)\times f\left(3\right)>0$$

(II) é verdadeira, pois a função f tem derivada finita em $x=-5$.

Opção (B)

3.

3.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f\left(0\right)=\dfrac{-0^2+7\times 0+2}{0+2}=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x}-2}+k\right)=k+\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{\left(\sqrt{4-x}-2\right)\left(\sqrt{4-x}+2\right)}=k+\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{4-x-4}=$$

$$=k+\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}{-x}=k+\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{4-x}+2}{-1}=k-4$$

f é contínua em $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f\left(0\right)$

$k-4=1\Leftrightarrow k=5$

3.2. $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+7x+2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x^2}=-1$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+7x+2}{x+2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+7x+2+x^2+2x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x+2}{x+2}=9$$

$y=-x+9$ é a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

4.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{4-x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{-(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{-(x+2)}=f'(2)\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{-2}{4-3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Opção (C)

5.

5.1. $f'(x)=2\times\left(\frac{x}{x-2}\right)^{2-1}\times\left(\frac{x}{x-2}\right)'=2\times\frac{x}{x-2}\times\frac{-2}{(x-2)^2}=-\frac{4x}{(x-2)^3}$

5.2. $m=f'(1)=\frac{-4}{-1}=4$

$f(1)=1$

$y=4x+b$

$1=4+b\Leftrightarrow -3=b$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1: $y=4x-3$

5.3. $f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{4x}{(x-2)^3}=0\Leftrightarrow -4x=0\wedge (x-2)^3\neq 0\Leftrightarrow x=0\wedge x\neq 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	–	n.d.	+
Variação de f	↗	Máx.	↘	n.d.	↗

f é crescente em $]-\infty,0]$ e em $]2,+\infty[$;

f é decrescente em $]0,2[$;

f tem um máximo relativo em $x=0$ de valor $f(0)=0$.

5.4. Queremos mostrar que existe pelo menos um ponto do gráfico de f, pertencente ao intervalo $]0,1[$,onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é

$\exists c \in]0,1[: f'(c) = 1$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow -\frac{4x}{(x-2)^3} = 1$$

f' é contínua no intervalo $[0,1]$ porque é quociente de duas funções contínuas.

$f'(0) = 0$. Então, $f'(0) < 1$. $f'(1) = \frac{-4}{-1} = 4$. Então, $f'(1) > 1$.

Como f' é contínua em $[0,1]$ e $f(0) < 1 < f(1)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c \in]0,1[: f'(c) = 1$

6.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Sinal de f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)\times f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$f'(x)\times f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-2] \cup [0,2]$$

Opção (C)

7. $(f \circ g)'(3) = f'(g(3)) \times g'(3)$

A reta de equação $y = -2x + 10$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 3, então $g'(3) = -2$ e $g(3) = -2\times 3 + 10 = 4$;

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{4}$$

$$f'(g(3)) \times g'(3) = f'(4)\times(-2) = \frac{1}{4}\times(-2) = -\frac{1}{2}$$

Opção (C)

8. $A(6,0)$ e $B(0,-3)$

$$m=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2} \text{ e } b=-3$$

A equação da assíntota é : $y=\frac{1}{2}x-3$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=-3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-2f(x)+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to+\infty}\left(2f(x)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}-2\times(-3)=\frac{13}{2}$$

9.

$$g''(x)=\left(x^2 f(x)\right)'=2x\times f(x)+x^2\times f'(x)=2x\times xf'(x)+x^2\times f'(x)$$
$$=2x^2\times f'(x)+x^2\times f'(x)=3x^2f'(x)$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow 3x^2f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2=0\vee \underbrace{f'(x)=0}_{\substack{\text{equação impossível}\\ f'(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}}}\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3x^2$	+	0	+
$f'(x)$	–	–	–
Sinal de g''	–	0	–
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cap$		$\cap$

O gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0]$ e em $[0,+\infty[$.

Como não apresenta mudança do sentido das concavidades, não tem pontos de inflexão.