1. $P\left(\overline{A}\right)=0,7$, então $P\left(A\right)=0,3$.

Como $A\cap B=\varnothing$, $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)\Leftrightarrow 0,9=0,3+P\left(B\right)\Leftrightarrow P\left(B\right)=0,6$

Donde se conclui que $P\left(\overline{B}\right)=0,4$.

Opção (B)

2. $P\left(D\,|\,C\right)$ é a probabilidade de a soma dos números inscritos nas bolas retiradas ser igual a 10, sabendo que a produto dos números inscritos nas bolas é ímpar.

O produto é ímpar se os dois números extraidos são ímpares:

1×7; 1×9; 3×7; 3×9; 5×7; 5×9

O número de casos possíveis é igual a 6.

Destes, apenas os casos 1×9 e 3×7 apresentam soma igual a 10.

Ou seja, o número de casos favoráveis é igual a 2.

Aplicando a Lei de Laplace: $P\left(D\,|\,C\right)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

Opção (B)

3. Com os dez algarismos de 0 a 9 queremos gerar códigos de segurança formados por sequências de seis dígitos, tendo no máximo, cada sequência, dois dígitos iguais e os restantes diferentes. Ou seja, podemos ter todos os dígitos da sequência diferentes ou, por outro lado, 2 iguais e os restantes diferentes.

No primeiro caso, o número de códigos diferentes que se podem obter é dado por ${}^{10}A_6$, uma vez que queremos determinar uma sequência ordenada de 6 elementos distintos escolhidos de entre os 10 algarismos disponíveis.

No segundo caso, o número de sequências distintas é dado por ${}^{6}C_2\times 10\times {}^{9}A_4$ uma vez que temos que determinar a posição ocupada pelos algarismos que serão iguais (das seis posições possíveis escolher um conjunto de duas ${}^{6}C_2$). Em seguida, escolher um dos 10 algarismos para colocar nessas posições (10 possibilidades) e, por último, escolher, ordenadamente, 4 algarismos distintos, de entre os 9 ainda disponíveis (${}^{9}A_4$ possibilidades)

Assim, a expressão que permite determinar, nestas condições, quantos códigos diferentes é possível gerar é a soma das contagens obtidas em cada um dos dois casos considerados, isto é ${}^{10}A_6+{}^{6}C_2\times 10\times {}^{9}A_4$.

4. Sejam A e B dois acontecimentos tais que:

- A: "O aluno é rapariga."
- B: "O aluno participa no concerto de Natal."

Dados: $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}P(A)$; $P\left(\overline{B}\mid A\right)=\frac{1}{3}$; $P(A\mid B)=\frac{3}{4}$

$$P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{3}P(A)\Leftrightarrow 1-P(A)=\frac{1}{3}P(A)\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{4}$$

$$P\left(\overline{B}\mid A\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow P\left(\overline{B}\cap A\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

$$P(A\mid B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{4}P(B)\Leftrightarrow \frac{4}{3}P(A\cap B)=P(B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}$$

5.

5.1. f é contínua em $x=2$ se e só se $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=\frac{2-3\times 2}{2-8}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=\frac{2}{3}$, então f é contínua em $x=2$.

5.2. f é contínua no intervalo $[-1,1]$ porque é quociente de duas funções contínuas.

$$f(-1)=\frac{\sqrt{(-1)^2+5}-3}{-1-2}=1-\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{1}{2}$$

$$f(1)=\frac{\sqrt{1^2+5}-3}{1-2}=3-\sqrt{6}>\frac{1}{2}$$

Como f é contínua em $[-1,1]$ e $f(-1)<\frac{1}{2}<f(1)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,

$\exists c\in\,]-1,1[\,: f(c)=\frac{1}{2}$.

6.1. f é contínua em $x=1$, pelo que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

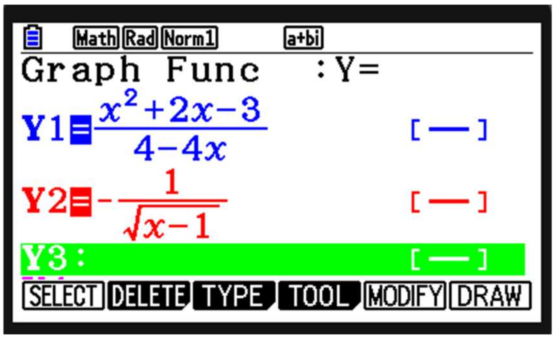
$$f(1) = k - \frac{2}{3}$$

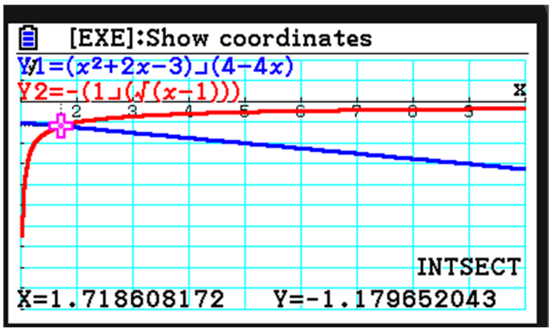
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2x-3}{4-4x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{-4(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{-4} = -1$$

$$k - \frac{2}{3} = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$$

Opção (A)

6.2 Pretendemos determinar o valor de $x \in \left]1,+\infty\right[$ tal que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{4-4x} = -\frac{1}{\sqrt{x-1}}$





$x \approx 1{,}72$

7.

$$\frac{P(\overline{A}\cup B)-P(A)}{P(A)} - P(B\,|\,A)+1 =$$

$$= \frac{P(\overline{A}\cup B)-P(A)-P(B\,|\,A)P(A)+P(A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\overline{A}\cup B)-P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}\cap B)-P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\overline{A})+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)-P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(\overline{A})}{P(A)}$$

8. f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua no intervalo $[0,1]$.

$f(0)=\frac{1}{a}>1$ pois $a<1 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{a}>1$

$f(1)=b<1$

Como f é contínua em $[0,1]$ e $f(1)<1<f(0)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]0,1\right[: f(c)=1$