1. Há nove algarismos disponíveis (de 1 a 9).

- ${}^{7}C_{3}$: número de maneiras distintas de escolher a "posição" que será ocupada pelos três algarismos iguais a 1.
- 8^{4} : Número de maneiras distintas para completar as restantes quatro "posições" . Em qualquer uma dessas "posições" pode ser ocupada por qualquer um dos restantes oito algarismos ($\neq 1$).
- ${}^{7}C_{3} \times 8^{4} = 143\ 360$ (número de números que satisfazem as condições pedidas)

Opção (B)

2. Temos disponíveis 15 peças de encaixe, sendo:

✓ 6 amarelas
✓ 5 verdes
✓ 4 roxas

As peças verdes devem ficar juntas.

- 11 : número de posições distintas que podem ser ocupadas pelas peças verdes que serão colocadas sempre como um bloco.
- ${}^{10}C_{6}$: número de formas distintas de determinar um conjunto de seis posições, a partir das dez ainda livres, para colocar as peças amarelas.
- As posições das peças roxas ficam automaticamente definidas.
- $11 \times {}^{10}C_{6} = 2310$ torres distintas

3. Temos disponíveis 14 elementos:

✓ 8 raparigas
✓ 6 rapazes

Queremos constituir um conjunto ordenado de três elementos, uma vez que cada um dos elementos escolhidos terá funções distintas.

Sabemos, ainda, que poderá ocorrer uma de duas situações: constituir uma comissão com duas raparigas e um rapaz ou, por outro lado, constituir uma comissão com uma rapariga e dois rapazes.

- ${}^{8}C_{2} \times {}^{6}C_{1}$: número de formas diferente de constituir um grupo com duas raparigas e um rapaz;

- ${}^{8}C_1 \times {}^{6}C_2$: número de formas diferentes de constituir um grupo com uma rapariga e dois rapazes;
- $3!$: permutação dos três elementos escolhidos pelos cargos que têm que desempenhar.

$\left({}^{8}C_2 \times {}^{6}C_1 + {}^{8}C_1 \times {}^{6}C_2\right) \times 3! = \left({}^{8}C_2 \times 6 + 8 \times {}^{6}C_2\right) \times 3!$

Opção (D)

4. Pretendemos sentar os sete amigos em lugares consectivos, em que numa das pontas fiquem a Ana e o Pedro.

- $2 \times 2!$: Número de maneiras diferentes em que a Ana e o Pedro podem ficar num de dois extremos e permutarem entre si.
- $5!$: número de formas diferente de ocupar os restantes cinco lugares pelos outros cinco amigos (não fazem parte a Ana e o Pedro)

$2 \times 2! \times 5! = 480$ maneiras de sentar os amigos de acordo com as condições definidas.

5. $\dfrac{8!}{2! \times 2! \times 3!} = 1680$

Opção (B)

6.

6.1. Na **resolução I**, ${}^{16}C_9$ representa o número de escolhas possíveis de 9 quadrados, dos 16 disponíveis, para colocar os discos brancos. Quanto a ${}^{7}A_3$ representa o número de diferentes possibilidades de escolher três quadrados, dos sete disponíveis, para colocar três discos de cores diferentes.

Na **resolução II**, ${}^{16}C_{12}$ representa o número de possibilidades diferentes de escolher um conjunto de 12 quadrados, dos 16 quadrados disponíveis, para colocar os 12 discos. Dos 12 lugares para os discos, são escolhidos 9 para os discos brancos, representando-se por ${}^{12}C_9$. Dos 12 lugares restam 3 para colocar os três discos, de cores diferentes, havendo $3!$ diferentes possibilidades.

6.2. O número de casos possíveis é dado por ${}^{16}C_9 \times {}^{7}A_3$ (determinado em **6.1**):

O número de casos favoráveis é dado por: ${}^{8}A_4$.

Os oito quadrados das diagonais são ocupados por 8 discos brancos.

Dos restantes 8 quadrados, quatro vão ser ocupados por discos de cores diferentes (1 branco; 1 vermelho; 1 preto e 1 amarelo), em que o número de possibilidades é ${}^{8}A_4$.

Pela Lei de Laplace, obtém-se o valor da probabilidade pedida: $\dfrac{{}^{8}A_4}{{}^{16}C_9 \times {}^{7}A_3} = \dfrac{1}{1430}$.

7. ${}^{n+1}C_7 + {}^{n+1}C_8 = {}^{n+2}C_8$

Atendendo a que ${}^{n+2}C_8$ é o elemento central de uma linha:

$$\underbrace{{}^{n+2}C_0 \quad {}^{n+2}C_1 \quad \cdots \quad {}^{n+2}C_7}_{8\,\text{elementos}} \quad \boxed{{}^{n+2}C_8} \quad \underbrace{{}^{n+2}C_9 \quad \cdots \quad {}^{n+2}C_{n+2}}_{8\,\text{elementos}}$$

Conclui-se que a linha tem 17 elementos. Então, $n+2=16$, ou seja, $n=14$

A soma dos elementos da "linha em que $n=14$" é $2^{14}=16\,384$.

8. $n^2 = 144 \Rightarrow n = 12$, uma vez que $n > 0$.

Trata-se, portanto, da linha que tem 13 elementos.

Como ${}^{12}C_p = {}^{12}C_{12-p}$, conclui-se que os seis primeiros elementos são iguais aos seis últimos. Assim, há nesta linha seis possibilidades de escolher dois elementos iguais.

Assim:

Número de casos favoráveis: 6

Número de casos possíveis: ${}^{13}C_2$

Aplicando a Lei de Laplace: $\dfrac{6}{{}^{13}C_2} = \dfrac{1}{13}$

Opção (C)

9.

$$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^6=\sum_{k=0}^{6}{}^6C_k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}(-x)^k$$

$${}^6C_k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{6-k}(-x)^k={}^6C_k\left(x^{-2}\right)^{6-k}(-1)^k x^k={}^6C_k(-1)^k x^{-12+2k}x^k={}^6C_k(-1)^k x^{-12+3k}$$

O termo independente ocorre quando $-12+3k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Se $k=4$, então: ${}^6C_4(-1)^4 x^{-12+3\times4}=15$

10. Seja b o número de bolas brancas. Então, o número de bolas azuis é igual a $50-b$.

Número de casos favoráveis: ${}^bC_1\times{}^{50-b}C_1$

Número de casos possíveis: ${}^{50}C_2$

Assim, recorrendo à lei de Laplace, vem que:

$$P(\text{"Saírem duas bolas de cores distintas"})=\frac{{}^bC_1\times{}^{50-b}C_1}{{}^{50}C_2}$$

$$\frac{{}^bC_1\times{}^{50-b}C_1}{{}^{50}C_2}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow b(50-b)=\frac{3\times1225}{7}$$

$$\Leftrightarrow b^2+50b-525=0$$

$$\Leftrightarrow b=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4\times1\times(-525)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b=15\vee b=35$$

Como o número de bolas brancas é inferior ao número de bolas azuis, então $b=15$.

Há 15 bolas brancas no saco.