1. Opção **(A)**

$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}94$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tem-se:

$P(B) = 0{,}94 - 0{,}42 + 0{,}06$, ou seja, $P(B) = 0{,}58$.

Assim, $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}06}{0{,}58} = \dfrac{3}{29}$.

2.1. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_2 = 66$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_2 + {}^{4}C_2 + {}^{3}C_2 = 19$

Probabilidade pedida: $\dfrac{19}{66}$

2.2. Dois processos:

1.º processo
Número de casos possíveis:
$12!$

Número de casos favoráveis:
$5! \times 4! \times 3! \times 3!$

Probabilidade pedida:
$\dfrac{5! \times 4! \times 3! \times 3!}{12!} = \dfrac{1}{4620}$

2.º processo (atendendo apenas à cor)
Número de casos possíveis:
$\dfrac{12!}{5!4!3!}$

Número de casos favoráveis:
$3!$

Probabilidade pedida:
$\dfrac{3!}{\dfrac{12!}{5!4!3!}} = \dfrac{3!5!4!3!}{12!} = \dfrac{1}{4620}$

2.3. Sair número ímpar sabendo que a bola não é dourada.

A probabilidade pedida é $\dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \dfrac{\frac{4}{12}}{\frac{8}{12}} = \dfrac{1}{2}$.

3. Opção **(D)**

Sejam *M*, *H* e *G* os acontecimentos:

M: "É escolhida uma rapariga."

H: "É escolhido um rapaz."

G: "É escolhido o Gil."

$P(G) = P(H \cap G) = ?$

Sabe-se que $P(G \mid H) = \dfrac{P(G \cap H)}{P(H)} \Leftrightarrow P(G \cap H) = P(H) \times P(G \mid H)$

Assim, $P(G) = P(H \cap G) = P(H) \times P(G \mid H) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

4. Sejam F e T os acontecimentos:

F: "Ser aluno do 12.º ano e apoiar as FamaGirls."

T: "Ser aluno do 12.º ano e apoiar as TopGirls."

$P(F \mid T) = ?$

Sabe-se que:

- $P\left(\overline{F \cup T}\right) = 0{,}15$
- $P(F \cup T) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$
- $P(F) = 0{,}27$
- $P(T \mid F) = 0{,}2$

Sendo $P(T \mid F) = 0{,}2$, então $\dfrac{P(T \cap F)}{P(F)} = 0{,}2$.

Tem-se $P(T \cap F) = 0{,}2 \times 0{,}27 = 0{,}054$.

$P(F) + P(T) - P(F \cap T) = 0{,}85 \Leftrightarrow 0{,}27 + P(T) - 0{,}054 = 0{,}85 \Leftrightarrow P(T) = 0{,}634$

Logo, $P(F \mid T) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}054}{0{,}634} \approx 0{,}08517$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 9%.

5. $P(A)\left[P(B|A)+1\right] + P\left(\overline{B} \cap A\right) = 2P(A)$

$$P(A)\left[P(B|A)+1\right] + P\left(\overline{B} \cap A\right) = P(A) \times \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + P(A) + P\left(\overline{B} \cap A\right) =$$

$$= P(B \cap A) + P\left(\overline{B} \cap A\right) + P(A) = P\left[\left(B \cup \overline{B}\right) \cap A\right] + P(A) =$$

$$= P(\Omega \cap A) + P(A) = P(A) + P(A) = \boxed{2P(A)}$$

6. Há duas "diagonais" com 4 números pares e duas "diagonais" com 3 números pares.

$2 \times {}^4C_3$ – das duas "diagonais" com 4 números pares escolher 3 da mesma "diagonal".

$2 \times {}^3C_3$ – das duas "diagonais" com 3 números pares escolher 3 desses números pertencentes à mesma "diagonal".

$2 \times {}^4C_3 + 2 \times {}^3C_3 = 10$

7.1. Opção **(B)**

$\lim\left(\dfrac{n+2}{n}\right) = \lim\left(1 + \dfrac{2}{n}\right) = 1^+$

Assim, $\lim\left(f(u_n)\right) = \lim \dfrac{3(u_n) - 5}{(u_n) + 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

7.2. Opção **(D)**

$\lim\left(3-n^2\right)=-\infty$. Assim, $\lim\left(f\left(v_n\right)\right)=\lim\dfrac{2\left(v_n\right)}{\left(v_n\right)-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{v_n}}=2$

8.1. g é contínua em $x=4$ se e só se $\lim\limits_{x\to4^-}g(x)=\lim\limits_{x\to4^+}g(x)=g(4)$

$$\lim_{x\to4^-}g(x)=g(4)=\frac{18-4^2}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to4^+}g(x)=\lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4^+}\frac{x+5-9}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4^+}\frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to4^+}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=\frac{1}{6}$$

Como $\lim\limits_{x\to4^-}g(x)=\lim\limits_{x\to4^+}g(x)=g(4)=\dfrac{1}{6}$, então g é contínua em $x=4$.

8.2. g é contínua no intervalo $[-2,0]$ porque é o quociente de funções contínuas, nesse intervalo.

$$g(-2)=\frac{18-4}{12}=\frac{7}{6}<\frac{6}{5}\ ;\ \ g(0)=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}>\frac{6}{5}$$

Como g é contínua em $[-2,0]$ e $g(-2)<\dfrac{6}{5}<g(0)$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy

$\exists c\in\left]-2,0\right[:g(c)=\dfrac{6}{5}$.

9.1. Opção **(B)**

h é contínua em $x=1$, pelo que $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to1^+}h(x)=h(1)$

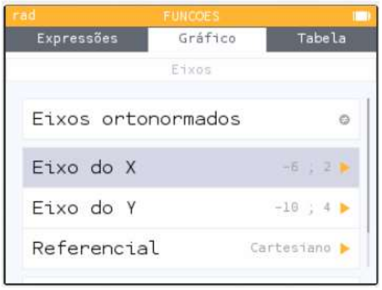
$h(1)=k^2-2k$

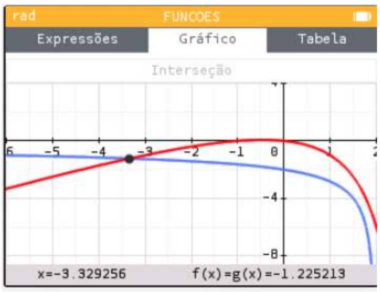
$$\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x(x+1)}{x-3}=\frac{2}{-2}=-1$$

$k^2-2k=-1\Leftrightarrow k^2-2k+1=0\Leftrightarrow(k-1)^2=0\Leftrightarrow k=1$

h é contínua para $k=1$.

9.2. Pretendemos determinar o valor de $x \in \left]-\infty, 2\right[$ tal que $h(x) = f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4x + 3} = -\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{2-x}{2}}}$





$x \approx -3{,}33$; $\quad h(-3{,}33) = f(-3{,}33) \approx -1{,}23$

Assim, as coordenadas do ponto de interseção das duas funções são $(-3{,}33; -1{,}23)$

10. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)f(b) = (a+b)ab < 0$, pois $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]a, b\right[: f(c) = 0$.