

1. Opção (D) $g(x) = 1 - f(x)$

2. ${}^6C_5 \times 5! \times 5! \times 5 = 432\,000$

Opção (B) $432\,000$

3.1. Opção (C) $3! \times 22!$

3.2. Número de maneira diferentes de escolher 4 dos 7 estrangeiros, 2 dos 15 não estrangeiros e distribuí-los pelos lugares da primeira fila: ${}^7C_4 \times {}^{15}C_2 \times 6!$

O número de maneiras diferentes de distribuir os restantes 16 convidados pelos 16 lugares restantes é igual a $16!$.

Número de casos favoráveis: ${}^7C_4 \times {}^{15}C_2 \times 6! \times 16!$

Número de casos possíveis: $22!$

Probabilidade pedida: $\frac{{}^7C_4 \times {}^{15}C_2 \times 6! \times 16!}{22!} \approx 0,049$

Resposta: 5%, aproximadamente

4.1. Área do semicírculo: $\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}$

Área do triângulo $[OPQ]$: $2 \times \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} = \sin \theta \cos \theta$

Área da região sombreada: $\frac{\pi}{2} - \sin \theta \cos \theta = \frac{\pi - 2 \sin \theta \cos \theta}{2} = \frac{\pi - \sin(2\theta)}{2}$

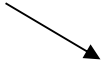
Daqui resulta que $f(\theta) = \frac{\pi - \sin(2\theta)}{2}$.

4.2. $f'(\theta) = \left(\frac{\pi - \sin(2\theta)}{2} \right)' = \frac{1}{2} \times (-2 \cos(2\theta)) = -\cos(2\theta)$

$f'(\theta) = 0 \wedge \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow -\cos(2\theta) = 0 \wedge \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		-	0	+	
f			$\frac{\pi-1}{2}$		

$\frac{\pi-1}{2}$ é mínimo (absoluto) da função f .

A função f é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. Opção (C) 2

6. Resposta: I – c); II – a); III – a); IV – b)

7.1. $f(x) = \frac{x^3 + \ln x}{x^2}$. Daqui resulta que $f(1) = 1$.

As coordenadas do ponto T são $(1, 1)$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + \ln x}{x^2} \right)' = \frac{\left(3x^2 + \frac{1}{x} \right) x^2 - 2x(x^3 + \ln x)}{x^4} = \frac{x^3 + 1 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(1) = \frac{1+1-0}{1} = 2. \text{ O declive da reta } r \text{ é } 2.$$

A reta r é definida por uma equação do tipo $y = 2x + b$.

$T(1, 1)$. O ponto T pertence à reta r . Então, $1 = 2 \times 1 + b$, ou seja, $b = -1$.

$A(x, 0)$. O ponto T pertence à reta r . Então: $0 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Resposta: O ponto A tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

7.2. $D_f = \mathbb{R}^+$

Seja $y = mx + b$ a equação da assíntota oblíqua do gráfico de f .

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + \ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + \ln x}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

Resposta: $y = x$

8. $f(0) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - e^{-x}}{0,75x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4e^{-x}(e^{3x} - 1)}{3x} \stackrel{**}{=} 4 \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(e^{\frac{y}{3}} \times \frac{e^y - 1}{e^y} \right) = 4 \times 1 \times 1 = 4$$

* Substituindo $3x$ por y , tem-se $3x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{3}$. Se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x - \sin x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} \stackrel{**}{=} \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{\sin x}{x} \right)}{\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sin z}{z}} = \frac{3 - 1}{\frac{1}{2} \times 1} = 4$$

** $\frac{x}{2} = z$. Se $\frac{x}{2} \rightarrow 0^+$, então $z \rightarrow 0^+$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, conclui-se que f é contínua em $x = 0$.

Resposta: A função é contínua em $x = 0$.

9.1. Se $x > 0$:

$$f''(x) = \left(\frac{x-3}{x^2} \right)' = \frac{x^2 - 2x(x-3)}{x^4} = \frac{6-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6-x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

x	0		6	$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-
$f(x)$			$f(6)$	

O ponto de abcissa 6, do gráfico de f , é um ponto de inflexão.

Resposta: A abcissa do ponto de inflexão é 6.

9.2. O declive da reta s é igual a $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2} - 3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{2}{3}$ e o declive da reta r é igual a $\frac{3}{2}$.

A abcissa (negativa) do ponto A é solução da equação $\frac{-e^{-x}(x+1)}{3x^2} = \frac{3}{2}$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:



Resposta: A abcissa do ponto A, arredondada às centésimas, é $-3,01$.

10.1. As coordenadas do ponto I são do tipo $(0, y, 0)$.

Como I pertence ao plano de equação $-4x + y + z = 1$, então $0 + y + 0 = 1$. Logo, $I(0, 1, 0)$.

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[VI]$.

Seja M o ponto médio de $[VI]$.

O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{3+0}{2}, \frac{-2+1}{2}, \frac{-3+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

O raio da superfície esférica é igual a:

$$\overline{MI} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}}$$

$$\text{Equação da superfície esférica: } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$$

10.2. A reta que passa em V e é perpendicular ao plano de equação $-4x + y + z = 1$ intersecciona-o no ponto C , centro da base do cone.

Uma equação vetorial dessa reta é $(x, y, z) = (3, -2, -3) + k(-4, 1, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

As coordenadas do ponto C são do tipo $(3 - 4k, -2 + k, -3 + k)$.

Como C pertence ao plano de equação $-4x + y + z = 1$, então:

$$-4(3 - 4k) - 2 + k - 3 + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

O ponto C tem coordenadas $(3 - 4 \times 1, -2 + 1, -3 + 1)$, ou seja, $C(-1, -1, -2)$.

$$\overline{VC} = \sqrt{(3+1)^2 + (-2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Resposta: A medida da altura do cone é $3\sqrt{2}$.

11. $w = -2 - 2i$

$$|w| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$w = 2\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

Resposta: Opção (B) $|z| \leq 2\sqrt{2} \wedge -\frac{3\pi}{4} \leq \text{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{2}$

$$12. w = \frac{1+i^{21}}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1+i}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}}{2e^{i(\frac{\pi}{3})}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

As outras raízes cúbicas de z são w_1 e w_2 , sendo:

$$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{15\pi}{12})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{23\pi}{12})}$$

A raiz cúbica pedida é $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$.

Resposta: $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$