1. Seja A o acontecimento: "Ter exatamente dois pares de algarismos iguais."

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right)=1-\frac{{}^{10}C_2\times\dfrac{4!}{2!\times 2!}}{{}^{10}A'_4}=0,973$$

2.1. $f\left(-1\right)=\dfrac{\left(-1\right)^2+3}{1-\left(-1\right)}=2$ e $f\left(1\right)=\sqrt{1^2+1}-4=\sqrt{2}-4$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}-4x\right)=0 \text{ e } \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+3}{1-x}=3$$

A função f não é contínua em $x=0$. Então, não é contínua em $\left[-1,\ 1\right]$ o que permite concluir que não estão verificadas as condições para aplicar o Teorema de Bolzano à função f no intervalo $\left[-1,\ 1\right]$.

2.2. $y=mx+b$.

Quando $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-4x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-4x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-4x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-4\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-4\right)=-3$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-4x+3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

Assíntota não vertical: $y=-3x+\dfrac{1}{2}$

Quando $x\to-\infty$:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+3}{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x-x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}=-1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+x}{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x}+1\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=-1.$$

Assíntota não vertical: $y=-x-1$

Interseção das assíntotas não verticais:

$$\begin{cases} y=-3x+\frac{1}{2} \\ y=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1=-3x+\frac{1}{2} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\frac{3}{2} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-\frac{7}{4} \end{cases}$$

As coordenadas do ponto de interseção das assíntotas são $\left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}\right)$.

3. Opção **(A)**

$f'(x)=3x^2+2ax-3$ e $f''(x)=6x+2a$

$f''(-2)+f'(-2)=0 \Leftrightarrow -12+2a+12-4a-3=0 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$

Assim, $f''(x)=6x-3$ e, consequentemente, $f''(1)=3$.

4. Opção **(B)**

Como $\forall x \in \left]-3, 0\right[$, $f'(x)<0$, conclui-se que f é estritamente decrescente no intervalo $\left]-3, 0\right[$.

Então, $f(-2)>f(-1)$, de onde resulta que $f(-2)-f(-1)>0$.

5. Opção **(A)**

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{9-x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{-\left(x^2-9\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to 3}\frac{1}{-(x+3)}$$

$$=f'(3)\times\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{(2+3)^2}\times\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{25}$$

6.1. $f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{x^2+3}\right)'=\frac{2x\left(x^2+3\right)-2x\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2x^3+6x-2x^3+8x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{14x}{\left(x^2+3\right)^2}$

6.2. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, pretende-se mostrar que existe um ponto do gráfico de f de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\sqrt{3}, \sqrt{5}\right[$, em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $y=\frac{3}{5}x$, ou seja, que $\exists c \in \left]\sqrt{3}, \sqrt{5}\right[: f'(c)=\frac{3}{5}$.

A função f' é contínua em $\mathbb{R}$ por ser quociente entre funções contínuas. Em particular, f' é continua no intervalo $\left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$.

$f'(\sqrt{5}) < \frac{3}{5} < f'(\sqrt{3})$, pois $f'(\sqrt{3}) = \frac{14\sqrt{3}}{36} \approx 0,67$ e $f'(\sqrt{5}) = \frac{14\sqrt{5}}{64} \approx 0,49$.

Como f' é contínua em $\left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$ e $f'(\sqrt{5}) < \frac{3}{5} < f'(\sqrt{3})$, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy,

conclui-se que $\exists c \in \left]\sqrt{3}, \sqrt{5}\right[: f'(c) = \frac{3}{5}$.

6.3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{14x}{(x^2+3)^2} = 0 \Leftrightarrow 14x = 0 \wedge \underbrace{(x^2+3)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$14x$	$-$	0	$+$
$(x^2+3)^2$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

f é decrescente em $\left]-\infty, 0\right]$ e é crescente em $\left[0, +\infty\right[$

f tem um mínimo absoluto em $x = 0$, de valor $f(0) = -\frac{4}{3}$.

6.4. $C\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$$f''(x) = \frac{14(x^2+3)^2 - 2(x^2+3) \times 2x \times 14x}{(x^2+3)^4} = \frac{14(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^4} = \frac{14(-3x^2+3)}{(x^2+3)^3} = \frac{-42x^2+42}{(x^2+3)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-42x^2+42}{(x^2+3)^3} = 0 \Leftrightarrow -42x^2+42 = 0 \wedge \underbrace{(x^2+3)^3 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-42x^2+42$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+3)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\cap$	$f(-1)$	$\cup$	$f(1)$	$\cap$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-4}{(-1)^2+3}=-\frac{3}{4}$$

Como f é uma função par, $f(-1)=f(1)$.

Os pontos de inflexão do gráfico de f são: $A\left(-1,\ -\frac{3}{4}\right)$ e $B\left(1,\ -\frac{3}{4}\right)$

$$A_{[ACBD]}=A_{[ABC]}+A_{[ABD]}=\frac{2\times\left|-\frac{4}{3}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right|}{2}+\frac{2\times\left|-\frac{3}{4}\right|}{2}=\frac{7}{12}+\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$$

7.1. Coordenadas do ponto de tangência: $(7,2)$

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$. Então, $m=g'(7)=\frac{1}{4}$.

A reta tangente é do tipo $y=\frac{1}{4}x+b$.

Então, $2=\frac{1}{4}\times 7+b \Leftrightarrow b=\frac{1}{4}$.

A reta tangente é definida pela equação $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

7.2. Opção **(D)**

$g(12)=\sqrt{12-3}=3$

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$ e $g'(12)=\frac{1}{6}$.

Se $y=4x$ representa a reta tangente ao gráfico da função h em $x=3$, conclui-se que $h'(3)=4$.

Então, $(h\circ g)'(12)=h'\left(\underbrace{g(12)}_{=3}\right)\times g'(12)=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

8. Opção **(B)**

Por observação da representação gráfica, conclui-se que a afirmação

$\forall x\in\left]1,7\right[,\ f(x)>0\wedge f''(x)<0$ é verdadeira.

9. Sabe-se que:

- $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$
- $f(3) = 0$
- $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$

$$g'(x) = \left(e^{f(x)} - f(x)\right)' = f'(x)e^{f(x)} - f'(x) = f'(x)\left(e^{f(x)} - 1\right)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^{f(x)} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f'(x) = 0}_{\substack{\text{equação impossível} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0}} \vee e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$e^{f(x)} - 1$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]3, +\infty\right[$$