Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de resolução [fevereiro – 2025]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Opção **(B)**

$$\lim(u_n)=\lim\left(\frac{n+k}{n+5}\right)^n=\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}=\frac{e^k}{e^5}=e^{k-5}$$

$$\lim u_n=e\sqrt{e}\Leftrightarrow e^{k-5}=e\sqrt{e}\Leftrightarrow e^{k-5}=e^{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow k-5=\frac{3}{2}\Leftrightarrow k=\frac{13}{2}$$

2. Opção **(A)**

$$\log_b\left(\sqrt{ab}\right)=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_b(ab)=3\Leftrightarrow\log_b(ab)=6\Leftrightarrow\log_b a+\log_b b=6\Leftrightarrow\log_b a=5$$

3.

3.1. $f(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-x}{-2x\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x(x-1)}{-2x\ln x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}$

Se $\ln x=y$, então $x=e^y$. Se $x\to1$, então $y\to0$

Assim, tem-se: $-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\ln x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{e^y-1}{y}=-\dfrac{1}{2}\times1=-\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{k\,e^{x-1}-k}{1-x^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{-(x-1)(x+1)}=k\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1}{-(x-1)(x+1)}$$

Mudança de variável:

Se $x-1=y$, então $x=y+1$. Se $x\to1$, então $y\to0$

Assim, tem-se:

$$k\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}-1}{-(x-1)(x+1)}=-k\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y(y+2)}=-k\left(\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\times\lim_{y\to0}\frac{1}{y+2}\right)=-k\left(1\times\frac{1}{2}\right)=-\frac{k}{2}$$

f é contínua em $x=1$ se e só se $-\dfrac{k}{2}=-\dfrac{1}{2}$, ou seja, $k=1$

3.2

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2x\,e^{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{x}+2e^{x-1}\right)=0+0=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3+2x\,e^{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3+2\times\frac{x}{e^{-x}}\right)$$

Se $e^{-x}=y$, então $x=-\ln y$. Se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$

Assim, tem-se: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{2}{e}\times\dfrac{x}{e^{-x}}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(3+\dfrac{2}{e}\times\dfrac{(-\ln y)}{y}\right)=3+\dfrac{2}{e}\times0=3$.

A reta $y=3$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$

4. Opção **(D)**

$g(x)=\left(e^{x^2}-e^9\right)\log_2(2x-8)$. $D_g=\{x\in\mathbb{R}:2x-8>0\}=]4,+\infty[$

$g(x)=0\Leftrightarrow\left(e^{x^2}-e^9\right)=0\vee\log_2(2x-8)=0$

$g(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}-e^9=0\Leftrightarrow e^{x^2}=e^9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=3\vee x=-3$

$\log_2(2x-8)=0\Leftrightarrow 2x-8=1\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

Atendendo ao domínio, o zero de g é: $\left\{\frac{9}{2}\right\}$

A probabilidade pedida é 0.

5. Opção **(D)**

$$f'(x)=\left(2x\sqrt{\ln(x)}\right)'=(2x)'\times\sqrt{\ln(x)}+\left(\sqrt{\ln(x)}\right)'\times 2x=2\sqrt{\ln(x)}+\frac{(\ln(x))'}{2\sqrt{\ln(x)}}\times 2x=$$

$$=2\sqrt{\ln(x)}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}x=2\sqrt{\ln(x)}+\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}=\frac{2\ln(x)+1}{\sqrt{\ln(x)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}=f'(e)=\frac{2\ln e+1}{\sqrt{\ln e}}=\frac{2\times 1+1}{\sqrt{1}}=3$$

6. $f'(x)=\left(\frac{2-\ln x}{x}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}\times x-(2-\ln x)}{x^2}=\frac{-3+\ln x}{x^2}$

$f(1)=\frac{2-\ln 1}{1}=2$; $A(1,2)$

$f'(1)=\frac{-3+\ln 1}{1^2}=-3$. O declive da reta r é -3.

$\tan(\pi-\theta)=-3\Leftrightarrow\tan\theta=3\Leftrightarrow\theta\approx 1{,}25\text{ rad}$

7. Opção **(C)**

$g'(x)=\left(2-\ln\left(x^2+1\right)\right)'=0-\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}$

$(f\circ g)'(0)=g'(0)\times f'(g(0))=0\times f'(2)=0$

8.

8.1. Sendo o triângulo $[OAB]$ isósceles, a abcissa do ponto A é $\frac{b}{2}$ e a ordenada é

$$f\left(\frac{b}{2}\right)=5\ln(b+1)-\frac{3}{2}b$$

A área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$$A(b)=\frac{\overline{OB}\times f\left(\frac{b}{2}\right)}{2}=\frac{b\times\left(5\ln(b+1)-\frac{3}{2}b\right)}{2}=\frac{10b\ln(b+1)-3b^2}{4}$$

8.2.

$$A'(b)=\left(\frac{5}{2}b\ln(b+1)-\frac{3}{4}b^2\right)'=\frac{5}{2}\ln(b+1)+\frac{5}{2}b\times\frac{1}{b+1}-\frac{3}{2}b=\frac{5}{2}\ln(b+1)+\frac{5b}{2b+2}-\frac{3}{2}b$$

A função A' é contínua em $]0\,,6]$, em particular é contínua em $\left[\frac{7}{2}\,,\,\frac{9}{2}\right]$

$$A'\left(\frac{7}{2}\right)=A'(3{,}5)=\frac{5}{2}\ln(3{,}5+1)+\frac{5\times3{,}5}{2\times3{,}5+2}-\frac{3}{2}\times3{,}5\approx0{,}455$$

$$A'\left(\frac{9}{2}\right)=A'(4{,}5)=\frac{5}{2}\ln(4{,}5+1)+\frac{5\times4{,}5}{2\times4{,}5+2}-\frac{3}{2}\times4{,}5\approx-0{,}443$$

Como a função A' é contínua em $\left[\frac{7}{2}\,,\,\frac{9}{2}\right]$ e $A'(4{,}5)<0<A'(3{,}5)$, então, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists c\in\left]\frac{7}{2}\,,\,\frac{9}{2}\right[:A'(c)=0$. Como a derivada passa de positiva a negativa, no intervalo $\left]\frac{7}{2}\,,\,\frac{9}{2}\right[$, conclui-se que no ponto de abcissa c a função A atinge um máximo. Então, a área do triângulo $[OAB]$ é máxima para um valor de b pertencente ao intervalo $\left]\frac{7}{2}\,,\frac{9}{2}\right[$.

9.

9.1.

$$g''(x)=\left(\frac{3\ln x}{x}\right)'=3\times\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=3\times\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow1-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$$

x	0		e	$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$
g		$\cup$	$g(e)$	$\cap$

A abcissa do ponto de inflexão é e.

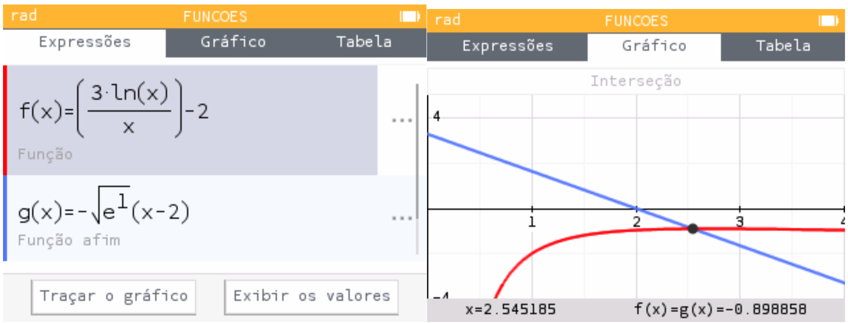
9.2. O ponto B pertence ao gráfico de g'.

As coordenadas do ponto B são do tipo $\left(x\,,\,\dfrac{3\ln x}{x}\right)$

Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(x-2\,,\,\dfrac{3\ln x}{x} - 2\right)$

O declive da reta r é dado por $\dfrac{\dfrac{3\ln x}{x} - 2}{x-2}$.

Então, $\dfrac{\dfrac{3\ln x}{x} - 2}{x-2} = -\sqrt{e} \Leftrightarrow \dfrac{3\ln x}{x} - 2 = -\sqrt{e}\,(x-2)$



A abcissa do ponto B, arredondada às centésimas, é $2{,}55$.