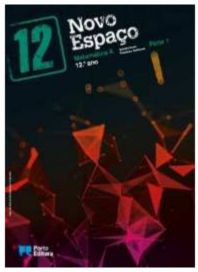
Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de resolução do teste de avaliação [janeiro – 2023]



1. $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B)$, ou seja, $0{,}8 - P(A \cap B) = 0{,}64$

Então: $P(A \cap B) = 0{,}16$ $y = 1$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}16}{0{,}36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Resposta: A opção correta é: **(A)** $\frac{4}{9}$

2.

Função	Assíntota vertical	Assíntota horizontal
$y = f(x-3)$	$x = 2+3 = 5$	$y = -1$
$y = -f(x-3)$	$x = 5$	$y = 1$
$g(x) = 5 - f(x-3)$	$x = 5$	$y = 1+5 = 6$

Resposta: A opção correta é: **(A)** $x = 5$ e $y = 6$

3. $f'(1) = 3$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: A opção correta é: **(C)** $\frac{3}{2}$

4.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2-x} & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{2x-2}{x^2+x-2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4.1 $1 \in D_f$. $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{2-x} = \frac{1}{2-1} = 1$ e $f(1) = \frac{1}{2-1} = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-2}{x^2+x-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x+2} = \frac{2}{3}$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, conclui-se que *f* não é contínua em $x = 1$.

Resposta: A função *f* não é contínua em $x = 1$.

4.2 Assíntotas verticais:

A função é contínua em todos os pontos do domínio, exceto em $x=1$.

Os limites laterais, quando x tende para 1, são deferentes de $\pm\infty$.

Resulta que não há assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}-1}=\frac{1}{0-1}=-1$$

A reta de equação $y=-1$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x^2+x-2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{x}}{x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{2-0}{+\infty(1-0-0)}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

Resposta: As equações das assíntotas ao gráfico de *f* paralelas aos eixos coordenados são $y=-1$ e $y=0$.

4.3 Declive da reta *s*: $m=\frac{2}{9}$

Se $x<1$, $f(x)=\frac{x}{2-x}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x}{2-x}\right)'=\frac{1\times(2-x)-(2-x)'\times x}{(2-x)^2}=\frac{2-x+x}{(2-x)^2}=\frac{2}{(2-x)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{2}{(2+1)^2}=\frac{2}{9}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -1 é igual ao declive da reta *s*.

Conclui-se que são retas paralelas.

5.

5.1 Declive da reta *r*: $m=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$

$$f'(4)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)=\frac{1}{2}$$

Resposta: $\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\frac{1}{2}$

5.2 Mostrar que $f(4)=8f'(4)$

O ponto P pertence ao gráfico de f, mas também pertence à reta r, logo:

$(4,f(4))=(8,6)+k(-4,-2)$, $k\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}4=8-4k\\ f(4)=6-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\ f(4)=4\end{cases}$$

Assim: $f(4)=8f'(4)$, ou seja, $4=8\times\frac{1}{2}$ (verdadeiro)

6.

6.1 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, atendendo a que $x\in\mathbb{R}^+$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

Logo, a função f atinge o valor mínimo absoluto no ponto de abcissa $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: A abcissa do ponto A é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.2 $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$

$$f''(x)=\left(2x-\frac{1}{x}\right)'=2+\frac{1}{x^2}$$

A função f'' é positiva em todos os pontos do domínio (não muda de sinal).

Conclui-se que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

7. Área de um círculo de raio r: πr^2

Área do círculo de diâmetro $[AB]$: $\pi \times 4^2 = 16\pi$

Área do círculo de diâmetro $[AC]$: $\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}x^2$

Área do círculo de diâmetro $[BC]$: $\pi \times \left(\frac{8-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 16x + 64\right)$

Área da região colorida: $S(x) = 16\pi - \left[\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\left(x^2 - 16x + 64\right)\right]$

$$S(x) = 16\pi - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 - 4\pi x + 16\pi\right) = 4\pi x - \frac{\pi}{2}x^2 = \frac{\pi}{2}\left(8x - x^2\right)$$

$x \in]0,8[$ e $S(x) = \frac{\pi}{2}\left(8x - x^2\right)$

$$S'(x) = \frac{\pi}{2} \times \left(8x - x^2\right)' = \frac{\pi}{2}(8 - 2x)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

x	0		4		8
$S'(x)$		+	0	–	
S		↗		↘	

Resposta: A área colorida é máxima para $x = 4$.

FIM

Cotações											Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	6.1	6.2	7	
Cotações	15	15	15	20	20	20	15	18	20	20	22	**200**