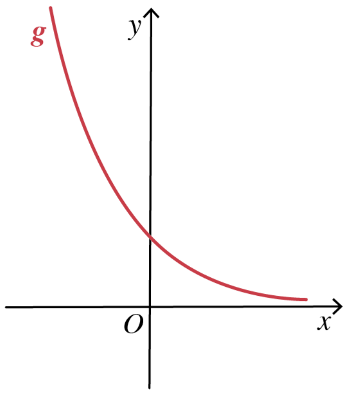
1. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.



Considera as sucessões (u_n), (v_n) e (w_n) tais que:

$$u_n = n - n^2 \;;\; v_n = \sqrt{n} \;\text{ e }\; w_n = \frac{1}{n^2+1}$$

Determina $\lim\left[g(u_n)\right]$, $\lim\left[g(v_n)\right]$ e $\lim\left[g(w_n)\right]$.

1. $\lim(u_n) = \lim(n - n^2) = -\infty \;;\; \lim g(u_n) = +\infty$

$\lim(v_n) = \lim\sqrt{n} = +\infty \;;\; \lim g(v_n) = 0$

$\lim(w_n) = \lim\dfrac{1}{n^2+1} = 0 \;;\; \lim g(w_n) = 1$

2. Considera a equação:

$$x\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^2\right)\left(x^2 - 4\right)\log_3(2x-1) = 0$$

Do conjunto-solução da equação, escolhe-se, ao acaso, uma solução.

Qual é a probabilidade de escolher uma solução que seja um número inteiro?

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{4}{5}$ **(C)** $\dfrac{3}{4}$ **(D)** $\dfrac{1}{5}$

2. $x\left(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^2\right)\left(x^2 - 4\right)\log_3(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^2 \vee x^2 - 4 = 0 \vee 2x - 1 = 1\right) \wedge 2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = \dfrac{2}{3} \vee x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1\right) \wedge x > \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3} \vee x = 2 \vee x = 1$

Conjunto-solução: $S = \left\{\dfrac{2}{3}, 2, 1\right\}$

A probabilidade pedida é $\dfrac{2}{3}$.

Opção correta: (A) $\dfrac{2}{3}$

3. Para um certo número k, diferente de zero, sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{e^{kx}-1}=3$.

Qual é o valor de k?

(A) 3 **(B)** $\dfrac{3}{2}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{e^{kx}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{kx}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\left[e^{x}\times\dfrac{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times 2}{\dfrac{e^{kx}-1}{kx}\times k}\right]=$

$$=\frac{2}{k}\lim_{x\to 0}e^{x}\times\frac{\lim\limits_{2x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{kx\to 0}\dfrac{e^{kx}-1}{kx}}=\frac{2}{k}\times 1\times\frac{1}{1}=\frac{2}{k}$$

Então, $\dfrac{2}{k}=3$, ou seja, $k=\dfrac{2}{3}$.

Opção correta: (D) $\dfrac{2}{3}$

4. Considera, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{x} & \text{se } x>0\\ k & \text{se } -1\le x\le 0\\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x<-1\end{cases}$$

4.1. Verifica se o gráfico de f tem assíntotas horizontais. Em caso afirmativo, apresenta uma equação para cada uma dessas assíntotas.

4.1. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0^{+}$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to +\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=\ln\left(1+0^{-}\right)=0^{-}$

A reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to -\infty$.

Resposta: O gráfico de f tem uma única assíntota horizontal, a reta de equação $y=0$.

4.2. Mostra que:

a) qualquer que seja o valor de *k*, a função *f* **não** é contínua em $x=0$ nem em $x=-1$.

b) se $x<-1$, então $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

4.2.

a) $f(0)=k$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq f(0)$, conclui-se que a função *f* é **descontínua** em $x=0$.

$f(-1)=k$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq f(-1)$, conclui-se que a função *f* é **descontínua** em $x=-1$.

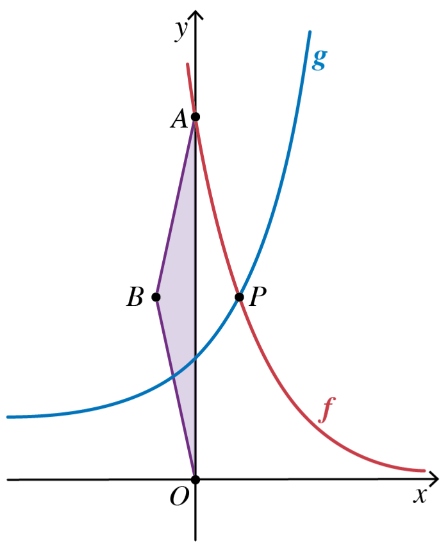
b) Se $x<-1$, então $f'(x)=\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]'$.

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{x}{x^2(x+1)}=-\frac{1}{x^2+x}$$

Fica provado que, se $x<-1$, então $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}$.

5. Na figura ao lado, estão representações gráficas das funções *f* e *g*, de domínio $\mathbb{R}$, e um triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- $f(x)=6e^{-x}$;
- $g(x)=e^{x}+1$;
- o ponto *P* é o ponto de interseção dos gráficos das funções *f* e *g*;
- o ponto *A* é o ponto de interseção do gráfico de *f* com o eixo *Oy*;
- os pontos *B* e *P* são simétricos um do outro em relação ao eixo *Oy*.



Mostra que a medida da área do triângulo $[OAB]$ é igual a $\ln 8$.

5. As coordenadas do ponto A são $\left(0, f(0)\right)$.

$f(0) = 6 \times \mathrm{e}^0 = 6$.

$A(0,6)$

A abcissa do ponto P é solução da equação $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 6\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + 1 \Leftrightarrow \frac{6}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x + 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x - 6 = 0$$

$$\mathrm{e}^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \ \vee \ \mathrm{e}^x = -3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

As coordenadas do ponto P são $\left(\ln 2,\ g(\ln 2)\right)$.

$g(\ln 2) = e^{\ln 2} + 1 = 2 + 1 = 3$

$P(\ln 2, 3)$

Medida da área do triângulo $[OAB]$: $\dfrac{\overline{OA} \times \dfrac{\overline{BP}}{2}}{2} = \dfrac{6 \times \ln 2}{2} = 3\ln 2 = \ln\left(2^3\right) = \ln 8$

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$.

A função f', função derivada de f, é definida por $f'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

6.1. O gráfico de f tem um ponto de inflexão. Determina a abcissa desse ponto.

6.1. $f''(x) = \left(\dfrac{2\ln(x)}{x}\right)' = 2 \times \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = 2 \times \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$

x	0		e	$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–
f		$\cup$		$\cap$

A abcissa do ponto de inflexão é e.

6.2. Considera a reta r que passa no ponto $A(1,1)$ e num ponto B do gráfico da função f'.

Sabe-se que o declive da reta r é igual a $-\sqrt{2}$.

Recorre às capacidades gráficas da calculadora e determina a abcissa do ponto B.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita obter o valor pedido;
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora;
- assinala o ponto cuja abcissa é pedida com valor arredondado às décimas.

6.2. O ponto B pertence ao gráfico de f'.

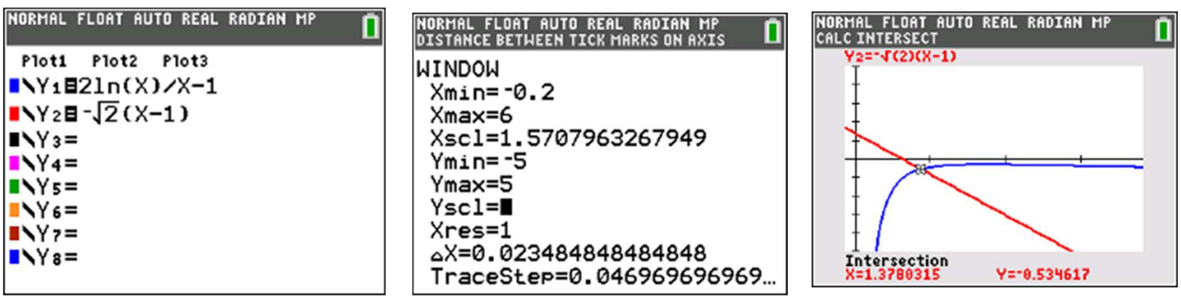
As coordenadas de B são do tipo $\left(x, \dfrac{2\ln(x)}{x}\right)$.

Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(x-1, \dfrac{2\ln x}{x} - 1\right)$.

O declive da reta r é dado por $\dfrac{\frac{2\ln x}{x} - 1}{x-1}$. Então:

$$\frac{\frac{2\ln x}{x} - 1}{x-1} = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} - 1 = -\sqrt{2}(x-1)$$

Recorrendo à calculadora resolve-se graficamente a equação: $\dfrac{2\ln x}{x} - 1 = -\sqrt{2}(x-1)$



A abcissa do ponto B, arredondada às décimas, é 1,4.

FIM

Cotações										Total
Questões	1.	2.	3.	4.1	4.2. a)	4.2. b)	5.	6.1.	6.2.	
Cotações	21	16	16	25	25	25	25	25	22	**200**