1.1. O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[OV]$.

Seja M o ponto médio de $[OV]$.

O ponto M tem coordenadas $\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+8}{2}, \frac{0+3}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{3}{2}\right)$.

O raio da superfície esférica é igual a $\overline{OM} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+16+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$.

Equação da superfície esférica: $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-4)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{41}{2}$

1.2. As coordenadas do ponto A são do tipo $(x,0,0)$.

Como A pertence ao plano de equação $x+2y-z=4$, então $x+0-0=4$.

$A(4,0,0)$

$\overrightarrow{OA} = A - O = (4,0,0)$ e $\overrightarrow{OV} = V - O = (3,8,3)$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OV}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OV}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OV}\right\|} = \frac{12+0+0}{\sqrt{16+0+0}\sqrt{9+64+9}} = \frac{3}{\sqrt{82}}$$

$$A\hat{O}V = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{82}}\right) \approx 70{,}653^\circ$$

A amplitude em graus, arredondada às unidades, do ângulo AOV é 71.

1.3. A reta que passa em V e é perpendicular ao plano de equação $x+2y-z=4$ interseta-o no ponto C, centro da base do cone.

Uma equação vetorial dessa reta é $(x,y,z)=(3,8,3)+k(1,2,-1)$, $k\in\mathbb{R}$.

As coordenadas do ponto C são do tipo $(3+k, 8+2k, 3-k)$.

Como C pertence ao plano de equação $x+2y-z=4$, então $3+k+16+4k-3+k=4$.

$3+k+16+4k-3+k=4 \Leftrightarrow 6k=-12 \Leftrightarrow k=-2$

O ponto C tem coordenadas $(1,4,5)$, ou seja, $C(1,4,5)$.

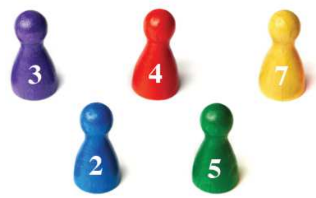
Seja h a altura do cone, em centímetros.

$$h=\overline{VC}=\sqrt{(3-1)^2+(8-4)^2+(3-5)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

O volume do cone é dado, em centímetros cúbicos, por $\frac{1}{3}\times 60\times 2\sqrt{6}$, ou seja, $40\sqrt{6}$.

Como $40\sqrt{6} \approx 97,9796$, conclui-se que o volume do cone, em centímetros cúbicos, arredondado às unidades, é 98.

2.1. Pretende-se determinar $P\left(\overline{B}\middle|A\right)$, ou seja, a probabilidade de a soma dos números retirados ser um número par, sabendo que um deles é 4.



A soma de três números é um número par se:

- os três números forem pares (o que, neste caso, é impossível);
- dois números forem ímpares e um for par.

Como saiu o número 4, para a soma ser par, os outros dois devem ser ímpares.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{3}C_{2} = 3$.

O número de casos possíveis é ${}^{5}C_{3} = 10$.

Então, $P\left(\overline{B}\middle|A\right) = \frac{3}{10}$.

2.2. O peão azul pode ficar em qualquer uma das cinco posições seguintes:

1) Azul ____ ____ ____ ____

Neste caso, os restantes peões podem ser dispostos de $4!$ maneiras diferentes.

2) ___ Azul ____ ____ ____

Neste caso, o peão vermelho tem 3 possibilidades e os outros têm 3!, ou seja, no total, há $3\times3!$ possibilidades.

3) ____ ____ Azul ____ ____

Neste caso, o peão vermelho tem 2 posições disponíveis e os outros peões têm 3!, ou seja, há $2\times3!$ possibilidades, ao todo.

4) ____ ____ ____ Azul ____

Neste caso, o peão vermelho tem 1 possibilidade e os outros têm 3!, ou seja, há, ao todo, $1\times3!$ possibilidades.

5) ____ ____ ____ ____ Azul

Nesta situação, o peão azul não pode ficar à esquerda do peão vermelho.

O número total de maneiras diferentes de colocar o peão azul à esquerda do peão vermelho é dado por $4!+3\times 3!+2\times 3!+1\times 3!=60$.

Opção (A)

3. Se $P\left(\overline{A\cap B}\right)=0,9$, então $P(A\cap B)=1-0,9=0,1$.

Sabe-se que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Como $P(A)=\frac{1}{2}P(A\cup B)$:

$P(A)=\frac{1}{2}\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)$, ou seja, $2P(A)-P(A)=P(B)-0,1$

Como $P(A)-P(B)=-0,1$, conclui-se que $P(B)>P(A)$.

4.1. Seja S a soma dos 20 termos consecutivos a começar em u_{10}.

$S=\frac{u_{10}+u_{29}}{2}\times 20=10\times\left(u_{10}+u_{29}\right)$

Sabe-se que $u_1=-5$ e que a razão da progressão aritmética é 3.

Então, o termo geral é $u_n=-5+(n-1)\times 3=3n-8$.

Assim, $S=10\times\left(u_{10}+u_{29}\right)=10\times(22+79)=1010$.

Opção (A)

4.2. $u_n=-5+(n-1)\times 3=3n-8$

$\lim u_n=\lim(3n-8)=+\infty$

$f(x)=3^{1-x}$

$\lim f(u_n)=\lim 3^{1-u_n}=3^{-\infty}=0$

Opção (D)

5.1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ke^{x-1}-k}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x+1)}$.

Seja $x-1=y$. Se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{k\left(e^{x-1}-1\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{k\left(e^{y}-1\right)}{y(y+2)}=k\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{y+2}=k\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{k}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x+\log_3(2-x)\right)=2+0=2$

Se a função g é contínua, então $\frac{k}{2}=2$, ou seja, $k=4$.

5.2. A taxa média de variação da função g no intervalo $[-1,0]$ é dada por:

$$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=\frac{\log_3(2)-(-2+\log_3(3))}{1}=\log_3(2)+1$$

Mas $\log_3(2)+1=\log_3(2)+\log_3(3)=\log_3(2\times 3)=\log_3 6$.

Assim, $a=6$.

Opção (A)

6. $f(x)=\mathrm{e}^{x+k}$

$f'(x)=\left(\mathrm{e}^{x+k}\right)'=\mathrm{e}^{x+k}$

$(f\circ g)'(1)=g'(1)\times f'(g(1))=2\times f'(1)=2\times \mathrm{e}^{1+k}$

$2\mathrm{e}^{1+k}=6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{1+k}=3 \Leftrightarrow 1+k=\ln(3) \Leftrightarrow k=\ln(3)-1 \Leftrightarrow k=\ln(3)-\ln(\mathrm{e})=\ln\left(\frac{3}{\mathrm{e}}\right)$

Opção (B)

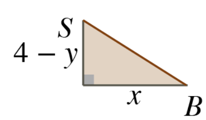
7.1. $S(0,4)$; $\overline{AB}=3\sqrt{2}$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{SA}^2+\overline{SB}^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2 \overset{\overline{SA}=\overline{SB}}{\Leftrightarrow} 2\overline{SB}^2=18 \Leftrightarrow \overline{SB}^2=9$$

Então, $\overline{SB}=3$.

Seja $B(x,y)$.



$\sin\theta=\frac{x}{3} \Leftrightarrow x=3\sin\theta$

$\cos\theta=\frac{4-y}{3} \Leftrightarrow 4-y=3\cos\theta \Leftrightarrow y=4-3\cos\theta$

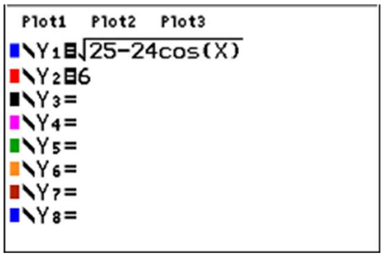
$$\overline{OB}=\sqrt{9\sin^2\theta+(4-3\cos\theta)^2}=\sqrt{9\sin^2\theta+16-24\cos\theta+9\cos^2\theta}=$$

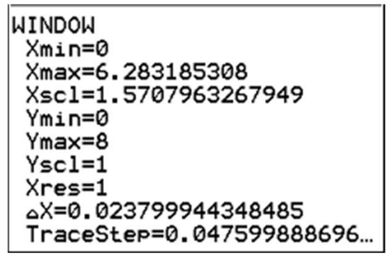
$$=\sqrt{9\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+16-24\cos\theta}=\sqrt{25-24\cos\theta}$$

Logo, $d(\theta)=\sqrt{25-24\cos\theta}$.

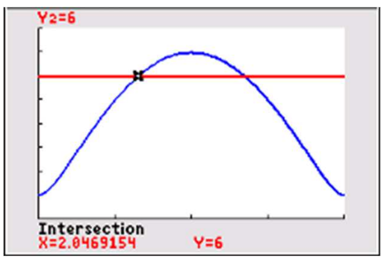
7.2. Pretende-se resolver a inequação $d(\theta) > 6$.

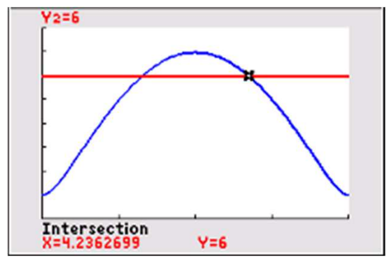
Visualizam-se, na calculadora gráfica, as representações gráficas das funções definidas por $y_1 = \sqrt{25 - 24\cos x}$ e $y_2 = 6$, com $0 \le x \le 2\pi$.





Identificam-se os pontos de interseção dos dois gráficos que se visualizam.





Conclui-se que $\theta \in \left]2{,}047\,;\,4{,}236\right[$.

8.1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x}$

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + 0 \times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln x}{x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Equação da assíntota ao gráfico de *f*: $y = x$

8.2. $$f'(x) = \left(\frac{x^2 + \ln x}{x}\right)' = \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)' = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 1 + \frac{1 - 0}{1} = 2$$

A inclinação da reta *r* é igual a $\pi - \theta$.

$\tan(\pi - \theta) = 2$

$\pi - \theta = \tan^{-1}(2)$

$\pi - \theta \approx 1{,}1071$

Daqui resulta que $\theta \approx 2{,}03$.

Opção (C)

8.3. $f'(x) = \left(\dfrac{x^2 + \ln x}{x}\right)' = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

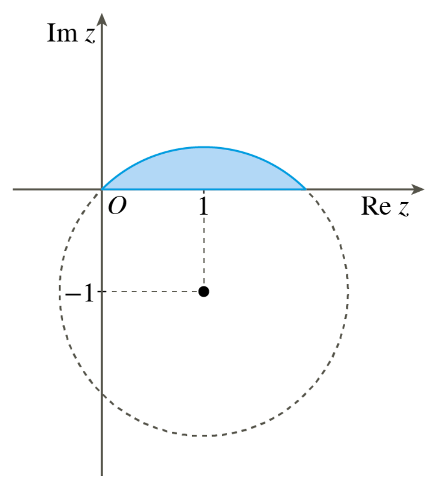
$$f''(x) = \left(1 + \frac{1 - \ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + 2\ln x = 0 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
f'		↘		↗

A abcissa do ponto P é $e^{\frac{3}{2}}$ (ou $e\sqrt{e}$).

9. $|z - (1 - i)| \leq \sqrt{2} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq 0$



Na figura está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição dada.

A medida da área da região sombreada é:

$$\frac{\pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2}{4} = \frac{2\pi - 4}{4} = \frac{\pi - 2}{2} \approx 0{,}57$$

Opção (C)

10. $z^4 \times \overline{z} = 32i$

Seja $z = \rho e^{i\theta}$.

$$z^4 \times \overline{z} = 32i \Leftrightarrow \left(\rho e^{i\theta}\right)^4 \times \rho e^{i(-\theta)} = 32e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \rho^5 e^{i(3\theta)} = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} \rho^5 = 32 \\ 3\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{\pi + 4k\pi}{6} \ , \ k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

A equação tem três soluções. Como o ponto *A* pertence ao 2.º quadrante, é o afixo do número complexo $z_A = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$.

$z_A = -\sqrt{3} + i$

11. $f'(x) = \sin(2x)e^{\sin^2 x}$

$f''(x) = \left(\sin(2x)e^{\sin^2 x}\right)' = 2\cos(2x)e^{\sin^2 x} + \sin(2x)\times 2\sin x\cos x \times e^{\sin^2 x} =$

$= 2\cos(2x)e^{\sin^2 x} + \sin^2(2x)e^{\sin^2 x} = e^{\sin^2 x}\left(2\cos(2x) + \sin^2(2x)\right)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) + \sin^2(2x) = 0$

Seja g a função definida por $g(x) = 2\cos(2x) + \sin^2(2x)$:

- a função g é contínua em $\mathbb{R}$, em particular, é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- $g(0) = 2 + 0 = 2$ e $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + 0 = -2$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < g(0)$

Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: g(c) = 0$.

Então, existe pelo menos um valor de $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f''(c) = 0$, logo, atendendo à informação do enunciado, conclui-se que existe pelo menos um ponto de inflexão do gráfico de *f* cuja abcissa pertence ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.