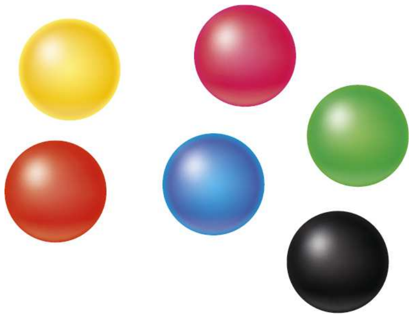
Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano

Proposta de resolução do teste de avaliação [maio – 2023]

1. Considera as seis bolas da figura, que apenas diferem na cor, sendo duas vermelhas, uma amarela, uma azul, uma verde e uma preta. As seis bolas vão ser colocadas aleatoriamente, lado a lado, em linha.

Determina a probabilidade de a bola preta ficar entre as bolas vermelhas em posições consecutivas.

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.



(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** $\frac{1}{30}$ **(C)** $\frac{2}{15}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

Número de casos favoráveis: $4 \times 3! = 24$

Número de casos possíveis: $\frac{6!}{2!} = 360$

Probabilidade pedida: $\frac{24}{360} = \frac{1}{15}$

Resposta: Opção **(A)** $\frac{1}{15}$

2. Num estudo estatístico sobre videojogos, participaram 500 jovens.

Sabe-se que:

- 45% dos participantes são raparigas;
- 40% das raparigas jogam videojogos;
- 43% dos participantes não jogam videojogos;

Escolhe-se, ao acaso, um dos participantes no estudo.

Qual é a probabilidade de o partecipante escolhido ser rapaz, sabendo que não joga videojogos? Apresenta o resultado em percentagem, arredondado às décimas.

Sejam R e J os acontecimentos:

R: "O participante escolhido é uma rapariga." J: "O participante escolhido joga videojogos."

$P\left(\overline{R} \middle| \overline{J}\right) = ?$

$0,45 \times 500 = 225$ (número de raparigas que participaram no estudo)

$500 - 225 = 275$ (número de rapazes que participaram no estado)

$0,4 \times 225 = 90$ (número de raparigas participantes que jogam videojogos)

$225-90=135$ (número de raparigas participantes que não jogam videojogos)

$0,43\times 500=215$ (número de participantes que não joga vídeo jogos)

$215-135=80$ (número de rapazes participantes que não jogam videojogos)

	J	$\overline{J}$	
R	90	135	225
$\overline{R}$		80	275
		215	500

$$P\left(\overline{R}\middle|\overline{J}\right)=\frac{P\left(\overline{R}\cap\overline{J}\right)}{P\left(\overline{J}\right)}=\frac{\frac{80}{500}}{0,43}=\frac{0,16}{0,43}\approx 0,372$$

Resposta: 37,2%

3. Considera a função *f*, de domínio $\mathrm{IR}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$$

3.1. Mostra que os eixos coordenados são assíntotas ao gráfico de *f*, quando representado num referencial o.n. *Oxy*.

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f*.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^-}\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$$

A reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

3.2. Considera a afirmação:

"Dada uma função, se a derivada é positiva em todos os pontos do domínio, então a função é crescente."

Utiliza a função *f* para mostrar que a **afirmação** é **falsa**.

$f(x) = \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$ e $D_f = \mathrm{IR} \setminus \{0\}$

$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}\right)' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}$

Repara que:

- $\forall x \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$, $1 + \frac{1}{x^2} > 0 \wedge e^{x-\frac{1}{x}} > 0$, logo conclui-se que: $f'(x) > 0,\ \forall x \in \mathrm{IR} \setminus \{0\}$
- Por exemplo: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ e $f(1) = \mathrm{e}^0 = 1$

Então, $-\frac{1}{2} < 1$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) > f(1)$, o que contraria a definição de função crescente.

A função *f* não é crescente no seu domínio.

4. Para valores positivos de *k*, considera a função, de domínio IR, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln(x+k) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que valor de *k* se obtém uma função contínua em $x = 0$?

(A) 2 **(B)** 2e **(C)** e^2 **(D)** $\frac{2}{\mathrm{e}}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(2 \times \frac{\sin x}{x} \times \cos x\right) = 2 \times 1 \times 1 = 2$

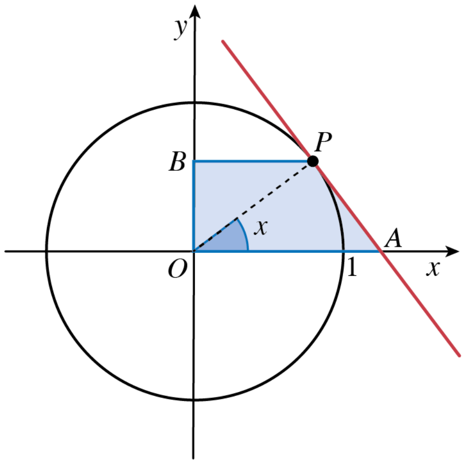
$f(0) = \ln(k)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x+k) = \ln k$

$\ln(k) = 2 \Leftrightarrow k = \mathrm{e}^2$

Resposta: Opção **(C)** e^2

5. Na figura, em referencial o.n. Oxy, estão representados uma circunferência de centro O e raio 1 e um trapézio $[OAPB]$.



Sabe-se que:

- P é um ponto do primeiro quadrante que pertence à circunferência;
- o ponto A pertence ao eixo Ox e a reta AP é perpendicular à reta OP;
- o ponto B pertence ao eixo Oy e a reta BP é paralela ao eixo Ox.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

5.1. Determina as coordenadas do ponto A, se $x = \frac{\pi}{6}$.

Se $x = \frac{\pi}{6}$, então as coordenadas do ponto P são $\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, ou seja, $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O declive da reta OP é igual a $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O declive da reta AP é igual a $-\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$.

Equação da reta AP: $y = -\sqrt{3}\,x + b$

O ponto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pertence à reta AP. Então: $\frac{1}{2} = -\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 2$

$AP:\ y = -\sqrt{3}\,x + 2$

Se $y = 0$, então: $0 = -\sqrt{3}\,x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Resposta: As coordenadas do ponto A são $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$.

5.2. Seja *f* a função de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ que a cada valor de x faz corresponder a área do trapézio $[OAPB]$.

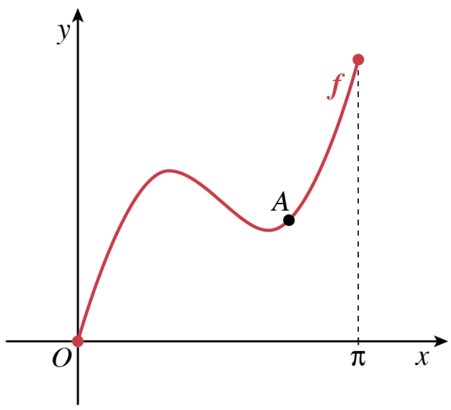
Admite que o ponto *A* tem coordenadas $\left(\frac{1}{\cos x}, 0\right)$ e mostra que $f(x) = \frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{2\cos x}$.

$$f(x) = \frac{\overline{OA}+\overline{BP}}{2} \times \overline{OB} = \frac{\frac{1}{\cos x}+\cos x}{2} \times \sin x = \frac{1+\cos^2 x}{2\cos x} \times \sin x = \frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{2\cos x}$$

$$f(x) = \frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{2\cos x}$$

6. Considera a função *f*, de domínio $[0, \pi]$, definida por:

$$f(x) = x + \sin(2x)$$



6.1. Na figura está representado o gráfico da função *f*.

Sabe-se que o ponto *A* pertence ao gráfico de *f*, tem abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e a reta tangente ao gráfico no ponto *A* é paralela à reta definida pela equação $y = x$.

Determina a abcissa do ponto *A*.

Se a reta tangente ao gráfico no ponto *A* é paralela à reta de equação $y = x$, então tem declive 1.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow (x+\sin(2x))' = 1 \Leftrightarrow 1+2\cos(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Como a abcissa do ponto *A* pertence ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, conclui-se que a abcissa do ponto *A* é $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\frac{3\pi}{4}$.

Resposta: $\frac{3\pi}{4}$

6.2. O gráfico de *f* tem um único ponto de inflexão. Determina as coordenadas desse ponto.

$$f'(x)=\left[x+\sin(2x)\right]'=1+2\cos(2x)$$

$$f''(x)=\left[1+2\cos(2x)\right]'=-4\sin(2x)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4\sin(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $D_f=[0,\pi]$:

$$x=0 \ \vee\ x=\frac{\pi}{2} \ \vee\ x=\pi$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\frown$	$\frac{\pi}{2}$	$\smile$	π

O único ponto de infexão é o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, ou seja, $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

7. Considera, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z=\frac{i^2+i}{2-i}$.

No plano complexo, o afixo do número complexo z pertente a uma circunferência de centro *O*, afixo do número 0. Determina o raio dessa circunferência.

Seja *r* o raio da circunferência.

$$r=|z|$$

$$z=\frac{i^2+i}{2-i}=\frac{-1+i}{2-i}=\frac{(-1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-3+i}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

$$|z|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{10}{25}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Resposta: $r=\frac{\sqrt{10}}{5}$