**1.** O zero não faz parte do número ou o zero faz parte do número.

**No caso de o zero não fazer parte do número:**

Os algarismos 1, 9, 7 e 2 ocupam quatro das cinco "posições" podendo permutar entre si.

O outro algarismo tem cinco possibilidade (3, 4, 5, 6 ou 8).

$^{5}C_{4} \times 4! \times 5 = 600$

**No caso de o zero fazer parte do número:**

O zero pode ocupar uma de quatro "posições" (o número não pode começar por zero, para ser maior do que 9999), e as restantes quatro posições são ocupadas pelos algarismos 1, 9, 7 e 2, que podem permutar entre si.

$4 \times 4! = 96$

No total há $600 + 96 = 696$ possibilidades

**Resposta:** **(D)** 696

**2.** $Q = \{(x, y), -3 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge x, y \in \mathbb{Z}\}$

$\# Q = 7 \times 7 = 49$

Há cinco pontos do gráfico de *f* que pertencem a $Q$:

$(-2,4);\ (-1,1);\ (0,0);\ (1,1);\ (2,4)$

Seja $p$ a probabilidade pedida.

$p = \frac{5}{49} \approx 0,102$

**Resposta:** **(A)** 0,102

**3.**

**3.1.**

Sejam *A* e *B* os acontecimentos.

*A*: " escolher círculo azul"

*B*. " obter prémio"

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = 0,25 \times 0,08 = 0,02$

**Resposta:** 2%

**3.2.** Seja $x$ a percentagem de círculos verdes com prémio.

Sejam $A$, $B$ e $V$ os acontecimentos:

$A$: "escolher círculo azul"

$B$: "obter prémio"

$V$: "escolher círculo verde"

$$P(B) = P(A \cap B) + P(V \cap B) = P(A) \times P(B|A) + P(V) \times P(B|V)$$

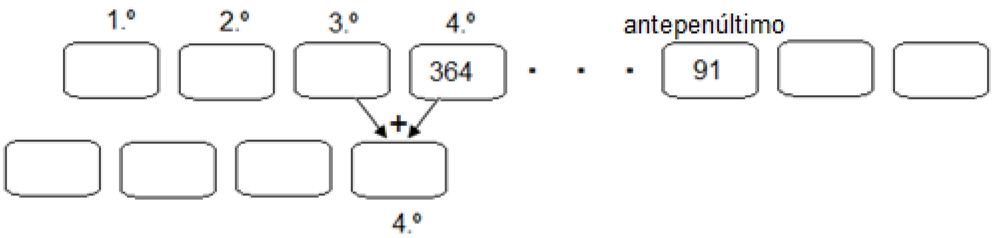
Assim: $0{,}11 = 0{,}25 \times 0{,}08 + 0{,}75x$

$0{,}11 = 0{,}25 \times 0{,}08 + 0{,}75x \Leftrightarrow x = 0{,}12$

**Resposta:** 12% dos círculos verdes têm prémio.

**4.** O antepenúltimo elemento da linha é igual ao terceiro elemento dessa linha. Logo, o terceiro elemento é 91.

A soma do terceiro com o quarto elementos da linha é igual ao quarto elemento da linha seguinte.




$364 + 91 = 455$

**Resposta:** **(B)** 455

**5.** $$\left(\frac{2}{x} - x\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} {}^8C_k \left(\frac{2}{x}\right)^{8-k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{8} {}^8C_k\, 2^{8-k} x^{-8+k} x^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{8} (-1)^k\, {}^8C_k\, 2^{8-k} x^{2k-8}$$

O termo independente de $x$ resulta quando $2k - 8 = 0$, ou seja, $k = 4$.

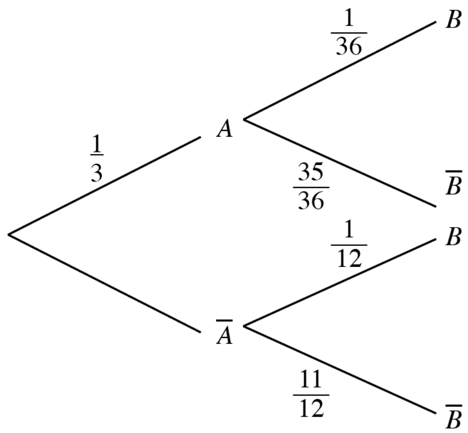
Esse termo é: $(-1)^4\, {}^8C_4 2^4 = 1120$

**Resposta:** **(C)** 1120

**6.** Considera os acontecimentos:

$A$: "escolher dois dados pontuados de igual forma"

$B$: "ocorrer pontuação 6 nos dois dados lançados"




$$P(A)=\frac{{}^{2}C_2}{{}^{3}C_2}=\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(B|A)=\frac{1}{6\times 6}=\frac{1}{36} \quad P(\overline{B}|A)=1-\frac{1}{36}=\frac{35}{36}$$

$$P(B|\overline{A})=\frac{1\times 3}{6\times 6}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12} \quad P(\overline{B}|\overline{A})=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{108}+\frac{6}{108}=\frac{7}{108}$$

**Resposta:** $\frac{7}{108}$

**7.** Sabe-se que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$$P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\setminus(A\cap B))}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(B)(1-P(A))}{P(B)}=1-P(A)=P(\overline{A})$$

Tal como se pretendia mostrar $P(\overline{A}|B)=P(\overline{A})$.

**8.** $$\lim \frac{n^2-1}{n+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim\left(n \times \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}\right) = +\infty \times \frac{1-0}{1+0} = +\infty$$

$\lim(u_n) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$

Conclui-se que $\lim\left(f(u_n)\right) = 3$.

**Resposta:** **(D)** 3

**9.** **Assíntota vertical**

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

A reta definida por $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico da função *f*.

**Assíntota oblíqua**

$y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{1-0} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2}$$

A reta definida por $y = x - \frac{1}{2}$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função *f*.

Interseção da assíntota oblíqua com a assíntota vertical:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x - \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O ponto de interseção pedido tem coordenadas $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

**Resposta:** $f(1) = k = \frac{1}{2}$