Máximo
Matemática A 12

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Porto Editora

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa escola secundária, os alunos do 12.º ano vão participar em atividades da Semana do Agrupamento.

1.1. Numa competição de matemática, participaram apenas alunos das turmas C e D.
Sabe-se que:

- $\frac{2}{5}$ eram da turma D;
- o número de rapazes era igual ao número de raparigas;
- $\frac{3}{4}$ dos rapazes eram da turma C.

Escolhe-se, ao acaso, um dos participantes.
Qual é a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga, sabendo que é da turma D ?
Apresente a resposta na forma de fração irredutível.

1.2. Dez amigos, três da turma C, cinco da turma D e dois alunos da turma A, vão sentar-se em duas filas do auditório da escola, cada uma com cinco lugares numerados de 1 a 5.
De quantas maneiras diferentes os dez amigos podem sentar-se, ficando os três alunos da turna 12.º C numa única fila?

(A) 50 400 **(B)** 100 800

(C) 302 400 **(D)** 604 800

2. Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos em E, com $P(A) \neq 0$.

Sabe-se que:

- $P(B) = \frac{1}{3}$
- os acontecimentos A e B são independentes.

Calcule $P(\overline{B} \mid \overline{A})$.

3. A que é igual o valor central da 7.ª linha do Triângulo de Pascal?

(A) 25 **(B)** 20

(C) 15 **(D)** 10

4. Seja Ω o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), com $P(B) \neq 0$.

Mostre que $P(A \cap B \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = 1$.

5. Considere a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = \frac{10n+3}{n+2}$.

Seja g a função definida em $]-\infty, 10[$ por $g(x) = \log_2(10-x)$.

A que é igual $\lim g[(a_n)]$?

(A) $-\infty$ **(B)** $+\infty$

(C) 0 **(D)** 1

6. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{x^2 - x} & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1-e^{2x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

6.1. Mostre que a função f é contínua.

6.2. Determine, caso existam, as equações das assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

6.3. Mostre que a reta de equação $y = x - 10$ interseta o gráfico da função f em pelo menos um ponto no intervalo $]1, 2[$.

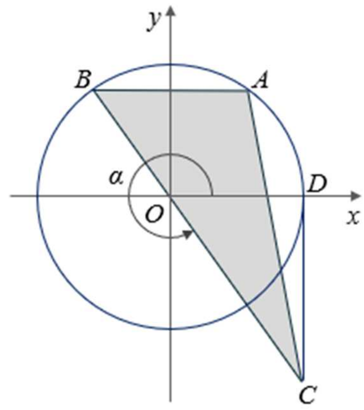
7. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n$?

(A) e^3 **(B)** e

(C) $e^{\frac{1}{3}}$ **(D)** $\frac{1}{e^3}$

8. Na figura, estão representados a circunferência trigonométrica e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao segundo quadrante e à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1, 0)$;
- o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox;
- a reta BC passa na origem do referencial;
- a reta CD é paralela ao eixo Oy.

Seja α a amplitude do ângulo com orientação positiva, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta OC $\left(\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[\right)$.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[ABC]$, em função de α?

(A) $\frac{\sin\alpha(\cos\alpha - 1)}{2}$ **(B)** $-\frac{\sin\alpha(\cos\alpha + 1)}{2}$

(C) $\sin\alpha(\cos\alpha - 1)$ **(D)** $-\sin\alpha(\cos\alpha + 1)$

9. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e duas vezes diferenciável.

Considere as seguintes afirmações:

I. Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então f tem um máximo relativo em $x = a$.

II. Se $f''(x) > 0$ num intervalo, então a função f é crescente nesse intervalo.

III. Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) = 0$, então f tem um máximo relativo em $x = a$.

Justifique que as afirmações I, II e III são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

10. Admita que t minutos após se desligar um forno, a sua temperatura, T, em graus Celsius, é dada, por:

$$T(t) = 200 - 25\ln(t+1),\quad 0 \leq t \leq 60$$

Existe um instante a, com $a \in [0, 1]$, para o qual a temperatura do forno, no intervalo de tempo $[a, a+1]$, diminui 7%.

Determine esse instante, recorrendo à calculadora.

Apresente o resultado em segundos, com arredondamento às décimas.
Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- Apresente a equação que lhe permitiu resolver o problema;
- Represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação.

FIM

Cotações

Item													
Cotação em pontos													
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**Total**
18	18	17	10	17	10	18	18	18	10	10	18	18	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. Sejam os acontecimentos:

D: "O participante escolhido é da turma D."

F: "O participante escolhido é rapariga."

Com os dados do enunciado, tem-se:

- $P(D)=\frac{2}{5}$
- $P(F)=P(\overline{F})=\frac{1}{2}$
- $P(\overline{D}\mid\overline{F})=\frac{3}{4}$

Pretende-se calcular $P(F\mid D)=\frac{P(F\cap D)}{P(D)}$.

$P(\overline{D}\cap\overline{F})=P(\overline{F})\times P(\overline{D}\mid\overline{F})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

Organizando os dados numa tabela, tem-se:

	F	$\overline{F}$	
D	$\frac{11}{40}$		$\frac{2}{5}$
$\overline{D}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$P(\overline{D})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$P(\overline{D}\cap F)=\frac{3}{5}-\frac{3}{8}=\frac{9}{40}$

$P(F\cap D)=\frac{1}{2}-\frac{9}{40}=\frac{11}{40}$

Portanto, $P(F\mid D)=\frac{\frac{11}{40}}{\frac{2}{5}}=\frac{\frac{11}{40}}{\frac{16}{40}}=\frac{11}{16}$

1.2. Os três alunos da turma C podem sentar-se numa das 2 filas de 5 lugares cada uma de ${}^5A_3$ maneiras diferentes, uma vez que a ordem pela qual se sentam é relevante. Como a ordem pela qual se sentam também é relevante, os restantes 7 alunos podem sentar-se nos 7 lugares disponíveis de $7!$ maneiras diferentes.

Logo, nas condições do enunciado, os dez alunos podem sentar-se de $2\times{}^5A_3\times 7!=604\ 800$ maneiras diferentes.

Opção correta: **(D)**

2. $P\left(\overline{B}\,|\,\overline{A}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{1-P(A\cup B)}{P\left(\overline{A}\right)}=$

$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P\left(\overline{A}\right)-P(B)+P(A)\times P(B)}{P\left(\overline{A}\right)}=$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$, pois A e B são acontecimentos independentes.

$=1-\frac{P(B)-P(A)\times P(B)}{P\left(\overline{A}\right)}==1-\frac{P(B)\left[1-P(A)\right]}{P\left(\overline{A}\right)}=$

$=1-\frac{P(B)P\left(\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

3. A sétima linha do triângulo de Pascal é constituída por todas as combinações de um conjunto com 6 elementos: ${}^6C_0\quad {}^6C_1\quad {}^6C_2\quad {}^6C_3\quad {}^6C_4\quad {}^6C_5\quad {}^6C_6$

O valor central dessa linha é ${}^6C_3=20$.

Opção correta: **(B)**

4. $P(A\cap B\,|\,B)+P\left(\overline{A}\,|\,B\right)=\frac{P((A\cap B)\cap B)}{P(B)}+\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=$

$=\frac{P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P\left[(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right]}{P(B)}=$

$(A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cap B\right)=$
$=A\cap\overline{A}\cap B\cap B=\varnothing\cap B=\varnothing$

$=\frac{P\left[\left(A\cup\overline{A}\right)\cap B\right]}{P(B)}=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

5. $\lim(a_n)=\lim\frac{10n+3}{n+2}=\lim\frac{10(n+2)-17}{n+2}=\lim\left(10-\frac{17}{n+2}\right)=10-0^+=10^-$

Assim, $\lim g\left[(a_n)\right]=\lim\limits_{x\to10^-}g(x)=\lim\limits_{x\to10^-}\log_2(10-x)=-\infty$.

Se $x\to10^-$, $10-x\to0^+$ e $\lim\limits_{x\to0^+}\log_2 x=-\infty$

Opção correta: **(A)**

6.

6.1. A função *f* é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, porque, em cada caso, resulta de operações entre funções contínuas nesses intervalos (composta, diferença e quociente).

A função f é contínua em $x=0$, se $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$.

- $f(0)=-2$
- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{x(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin(2x)}{2x}\times\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2}{x-1}\overset{y=2x}{=}\lim\limits_{y\to0^-}\frac{\sin y}{y}\times\frac{2}{-1}=1\times(-2)=-2$

$y=2x$ e
Se $x\to0^-$, $y\to0^-$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-e^{2x}}{x} = -2\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} \underset{y=2x}{=}$

  $-2\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = -2\times 1 = -2$

$y = 2x$
Se $x \to 0^+$, $y \to 0^+$

Logo, a função *f* é contínua em $x = 0$.

Portanto, a função *f* é contínua.

6.2. **Assíntotas verticais**

O gráfico da função *f* não tem qualquer assíntota vertical, uma vez que *f* é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2-x} \times \sin(2x) = 0$, pois

  $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$ e a função definida por $\sin(2x)$ é limitada

  $\left(\forall x \in \left]-\infty, 0\right[, -1 \le \sin(2x) \le 1\right)$.

  Quando $x \to -\infty$, o gráfico de *f* admite como assíntota reta de equação $y = 0$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-e^{2x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{2x}}{x}\right) =$

  $= \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} \underset{y=2x}{=} 0 - 2\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y} = -(+\infty) = -\infty$

$y = 2x$
Se $x \to +\infty$, $y \to +\infty$

Quando $x \to +\infty$, o gráfico de *f* não admite qualquer assíntota horizontal

Portanto, o gráfico de *f* tem como única assíntota paralela aos eixos coordenados a reta de equação $y = 0$.

6.3. $f(x) = x - 10 \Leftrightarrow f(x) - x + 10 = 0 \Leftrightarrow$

Considerando $g(x) = f(x) - x + 10$, temos de provar que a equação $f(x) - x + 10 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\left]0, 2\right[$, o que é equivalente a provar que a equação $g(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no mesmo intervalo.

Como a função *f* é contínua em $\mathbb{R}$ e a função definida por $-x+10$ é contínua em $\mathbb{R}$, a função g também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua em $[1, 2]$.

$$g(1) = f(1) - 1 + 10 = \frac{1-e^2}{1} + 9 = 10 - e^2 \approx 2{,}6 > 0$$

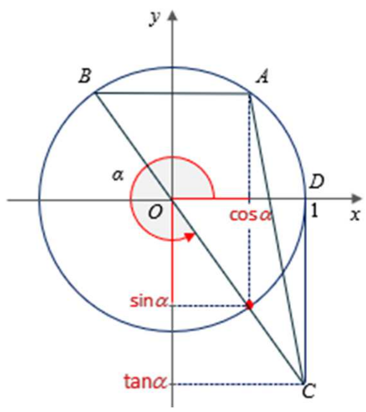
$$g(2) = f(2) - 2 + 10 = \frac{1-e^4}{2} + 8 = \frac{17-e^4}{2} \approx -18{,}8 < 0$$

Como $g(2) < 0 < g(1)$, pelo Teorema de Bolzano, podemos concluir que a equação $g(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]1, 2[$ ou, de forma equivalente, que a equação $f(x) = x - 10$ tem pelo menos uma solução no mesmo intervalo, a reta de equação $y = x - 10$ interseta o gráfico de *f* em pelo menos um ponto em $]1, 2[$.

7. $\lim\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{n}\right)^n = e^{\frac{1}{3}}$

Opção correta: **(C)**

8. $A_{[ABC]} = \frac{(x_A - x_B)(y_A - y_C)}{2}$



$A(\cos\alpha, -\sin\alpha)$

$B(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$

$C(1, \tan\alpha)$

$$A_{[ABC]} = A(\alpha) = \frac{[\cos\alpha - (-\cos\alpha)](-\sin\alpha - \tan\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{2\cos\alpha(-\sin\alpha - \tan\alpha)}{2} = \frac{-2\cos\alpha\sin\alpha - 2\cos\alpha\tan\alpha}{2} =$$

$$= \frac{-\sin(2\alpha) - 2\sin\alpha}{2} = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha}{2} =$$

$$-\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha + 1)}{2} = -\sin\alpha(\cos\alpha + 1)$$

Opção correta: **(D)**

9.

- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então *f* tem um mínimo relativo em $x = a$, pelo que a afirmação **I** é falsa.
- Se $f''(x) > 0$ num intervalo, significa que nesse intervalo o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima, pelo que a função *f* é crescente se $f'(x) > 0$ e decrescente se $f'(x) < 0$. Logo, a afirmação **II** é falsa, pois $f''(x) > 0$ não implica necessariamente que a função *f* seja crescente.
- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) = 0$, nada se pode concluir, pois em $x = a$ pode existir um mínimo relativo, um máximo relativo ou um ponto de inflexão. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, então $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ e em $x = 0$ existe um ponto de inflexão.

  Logo, a afirmação **III** é falsa.

10. Pretende-se resolver graficamente a equação:

$T(a+1) = 0{,}93T(a)$, com $a \in [0, 1]$

Fazendo, na calculadora:

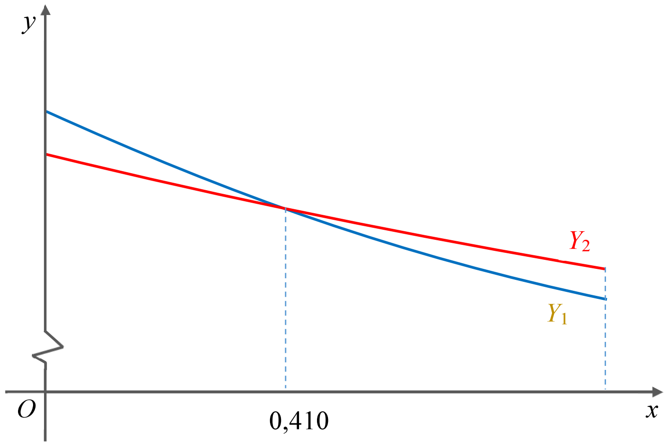
$$Y_1 = T(x) = 200 - 25\ln(x+1)$$

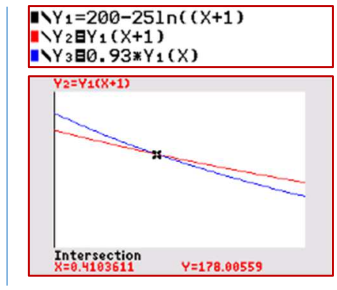
$$Y_2 = Y_1(x+1)$$

$$Y_3 = 0{,}93 \times Y_1(x)$$

Determinou-se, no intervalo $[0, 1]$, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de Y_2 e Y_3.

Obteve-se o seguinte resultado:





$a \approx 0{,}410 \text{ min} = 0{,}410 \times 60 \text{ s} = 24{,}6 \text{ s}$

Logo, $a \approx 24{,}6$ s .