Máximo Matemática A 12

Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa turma com 12 rapazes e 10 raparigas, pretende-se formar uma comissão de 5 alunos com, pelo menos, 3 raparigas, para apresentar uma proposta para o OPE (Orçamento Participativo das Escolas). Quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 + {}^{10}C_4 \times 12 + {}^{10}C_5$ **(B)** ${}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + {}^{10}C_5$

(C) ${}^{22}C_5 - {}^{12}C_5 - {}^{12}C_4 \times 10 - {}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$ **(D)** ${}^{10}C_3 \times {}^{19}C_2$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos independentes, com $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$.

Qual é o valor de $P(A \cup B)$?

(A) $0,6$ **(B)** $0,7$ **(C)** $0,8$ **(D)** $0,9$

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, qual das seguintes condições define, no plano complexo, uma reta paralela ao eixo imaginário?

(A) $|z-2| = |z-2\mathrm{i}|$ **(B)** $\operatorname{Im}(z) = 3$

(C) $\operatorname{Re}(z) = -1$ **(D)** $\operatorname{Arg}(z-1) = \frac{\pi}{4}$

4. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\sin(3x)}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

5. Para certos números reais positivos a e b, sabe-se que

$$\log_3(a^2 b) = 4 \text{ e } \log_3\left(\frac{a}{b^3}\right) = -5$$

Qual é o valor de $\log_3(ab)$?

(A) 1 **(B)** $\frac{7}{4}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{17}{7}$

6. Numa escola secundária, há um clube de fotografia.

Relativamente aos alunos membros do clube, sabe-se que:

- 60% são raparigas;
- 40% dos rapazes têm máquina fotográfica própria;
- Metade das raparigas têm máquina fotográfica própria.

Escolheu-se um aluno membro do clube e verificou-se que tinha máquina fotográfica própria.

Qual é a probabilidade de ser um rapaz?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

7. Numa caixa existem apenas fichas azuis e fichas verdes, indistinguíveis ao tato.

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas fichas da caixa.

Sabe-se que:

- há exatamente 5 fichas verdes na caixa;
- há mais fichas azuis do que fichas verdes;
- a probabilidade de que as duas fichas retiradas sejam de cores diferentes é igual a $\frac{10}{21}$.

Determine quantas fichas azuis há inicialmente na caixa.

8. Considere a função *f*, de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = x - \ln(x+1)$.

8.1. Estude a função *f* quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

8.2. Mostre que a função *f* é monótona nos intervalos $]-1, 0]$ e $[0, +\infty[$ e que tem um extremo relativo em $x = 0$.

8.3. Mostre que a equação $f(x) = 1$ tem exatamente duas soluções no intervalo $]-0,9\,;\,2,2[$.

9. Seja *g* uma função diferenciável, de domínio $]-\pi, \pi[$, cuja derivada, g', é dada por:

$$g'(x) = \cos(2x) - 4\sin x$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

9.1. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$, e seja s a reta paralela à reta r que intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 1. Determine a equação reduzida da reta s.

9.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

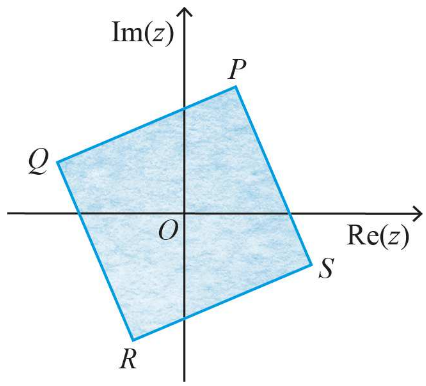
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de *f* tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de *f* , caso este(s) exista(m).

10. No plano complexo, considere um quadrado $[PQRS]$.

Sabe-se que:

- o vértice P é o afixo do número complexo $z_P = 2 + 5\mathrm{i}$;
- o centro do quadrado é o ponto O, origem do referencial.

Determine, na forma algébrica, o número complexo z_S, cujo afixo é o vértice S.



11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a seguinte equação:

$$z(1+\mathrm{i}) + \overline{z} = |3 - 4\mathrm{i}| - 2\mathrm{i}^3$$

Determine o número complexo z que é solução desta equação.

Apresente o resultado na forma $a + b\mathrm{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Após a administração intravenosa de um determinado fármaco a um paciente, a concentração desse fármaco no sangue, $C(t)$, medida em miligramas por litro (mg/L), é dada, t horas após a administração, por

$$C(t) = 75\mathrm{e}^{-0,6t}, \text{ com } t \geq 0$$

Nas primeiras duas horas após a administração do fármaco, existe um instante a para o qual se verifica que, no intervalo de tempo $[a, 2a]$, a concentração do fármaco no sangue diminuiu para metade.

Determine, recorrendo à calculadora, a amplitude desse intervalo de tempo.

Apresente o resultado em horas e minutos, com arredondamento ao minuto.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

FIM

Cotações

Item															
Cotação em pontos															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.**	**Total**
12	12	12	12	12	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	**200**

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1. Pretende-se formar uma comissão de 5 alunos (escolhidos entre 12 rapazes e 10 raparigas) com, pelo menos, 3 raparigas.

Casos possíveis:

- 3 raparigas e 2 rapazes: ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2$
- 4 raparigas e 1 rapaz: ${}^{10}C_4 \times {}^{12}C_1 = {}^{10}C_4 \times 12$
- 5 raparigas e 0 rapazes: ${}^{10}C_5 \times {}^{12}C_0 = {}^{10}C_5 \times 1 = {}^{10}C_5$

O número total de comissões diferentes é a soma dos casos: ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_2 + {}^{10}C_4 \times 12 + {}^{10}C_5$

Resposta: **(A)**

2. Sejam A e B acontecimentos independentes, com $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,5$.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$

Assim: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,2 = 0,7$

Resposta: **(B)**

3. **(A)** $|z-2| = |z-2\mathrm{i}|$ Representa o conjunto dos pontos equidistantes dos afixos de 2 e $2\mathrm{i}$, ou seja, a mediatriz do segmento de reta cujos extremos são esses pontos. Trata-se da bissetriz dos quadrantes ímpares, de equação $y = x$, que não é uma reta vertical.

(B) $\operatorname{Im}(z) = 3$. Representa uma reta paralela ao eixo real.

(C) $\operatorname{Re}(z) = -1$. Representa uma reta paralela ao eixo imaginário.

(D) $\operatorname{Arg}(z-1) = \frac{\pi}{4}$. Representa uma semirreta com origem no ponto de coordenadas $(1, 0)$ que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude $\frac{\pi}{4}$.

Resposta: **(C)**

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sin(3x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} \times \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{2}{3}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \overset{y=2x}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1$ $\quad (\text{se } x \to 0,\ \text{y} \to 0)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(3x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}} \overset{y=3x}{=} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1$ $\quad (\text{se } x \to 0,\ \text{y} \to 0)$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2x} \times \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{\sin(3x)} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Resposta: **(C)**

5. $\log_3\left(a^2b\right)=4 \Leftrightarrow \log_3\left(a^2\right)+\log_3 b=4 \Leftrightarrow 2\log_3 a+\log_3 b=4$

$\log_3\left(\frac{a}{b^3}\right)=-5 \Leftrightarrow \log_3 a-\log_3\left(b^3\right)=-5 \Leftrightarrow \log_3 a-3\log_3 b=-5$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} 2\log_3 a+\log_3 b=4 \\ \log_3 a-3\log_3 b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 b=2 \\ \log_3 a=1 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

Seja $x=\log_3 a$ e $y=\log_3 b$

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3y+5)+y=4 \\ x=3y+5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y=14 \\ x=3y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Logo, $\log_3(ab)=\log_3 a+\log_3 b=1+2=3$

Resposta: **(C)**

6. Sejam os acontecimentos:

R: «O membro do clube é rapaz.»

F: «O membro do clube tem máquina fotográfica própria.»

Do enunciado:

- $P\left(\overline{R}\right)=0,6 \Leftrightarrow P(R)=0,4$
- $P(F\mid R)=0,4$
- $P\left(F\mid \overline{R}\right)=0,5$

Pretende-se calcular $P(R\mid F)=\frac{P(R\cap F)}{P(F)}$.

$$P(F\mid R)=0,4 \Leftrightarrow \frac{P(R\cap F)}{P(R)}=0,4 \Leftrightarrow \frac{P(R\cap F)}{0,4}=0,4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(R\cap F)=0,16$$

$$P\left(F\mid \overline{R}\right)=0,5 \Leftrightarrow \frac{P\left(F\cap \overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)}=0,5 \Leftrightarrow \frac{P\left(F\cap \overline{R}\right)}{0,6}=0,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(F\cap \overline{R}\right)=0,3$$

$$P(F)=P(F\cap R)+P\left(F\cap \overline{R}\right)=0,16+0,3=0,46$$

	F	$\overline{F}$	
R	0,16		**0,4**
$\overline{R}$	0,3		**0,6**
	0,46		1

Logo, $P(R\mid F)=\frac{P(R\cap F)}{P(F)}=\frac{0,16}{0,46}=\frac{16}{46}=\frac{8}{23}$.

A probabilidade pedida é $\frac{8}{23}$.

7. Seja a o número de fichas azuis.

Na caixa há 5 fichas verdes e a fichas azuis.

As fichas retiradas têm cores se a primeira ficha retirada for azul e a segunda verde ou vice-versa.

As respetivas probabilidades são $P_1 = \dfrac{a \times 5}{(a+5)(a+4)}$ e $P_2 = \dfrac{5 \times a}{(a+5)(a+4)}$

A probabilidade de que as duas fichas retiradas sejam de cores diferentes é igual a

$$P = P_1 + P_2 = \frac{a \times 5}{(a+5)(a+4)} + \frac{5 \times a}{(a+5)(a+4)} = \frac{10a}{(a+5)(a+4)}$$

Como $P = \dfrac{10}{21}$, vem:

$$\frac{10a}{(a+5)(a+4)} = \frac{10}{21} \Leftrightarrow (a+5)(a+4) = 21a \Leftrightarrow a^2 + 9a + 20 = 21a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 10$$

Como $a > 5$, então $a = 10$.

8. $D_f =]-1, +\infty[$

A função f é contínua por se tratar da soma e composta de funções contínuas.

8.1. **Assíntotas verticais**

Apenas a reta de equação $x = -1$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left[x - \ln(x+1) \right] = 1 - \ln\left(0^+\right) = 1 - (-\infty) = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais

Como $D_f =]-1, +\infty[$ o gráfico de f somente poderá ter assíntota não vertical quando $x \to +\infty$.

Seja $y = mx + b$ a assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, caso exista.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} =$$

$$= 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left[x\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]}{x} = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = 1 - 0 - \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 - \frac{0}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \ln(x+1) - x \right] =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \ln(x+1) = -\ln(+\infty) = -\infty$$

Como $b \notin \mathbb{R}$, não existe assíntota quando $x \to +\infty$

Portanto, a única assíntota ao gráfico de f é a reta de equação $x = -1$.

8.2. $f'(x)=\left[x-\ln(x+1)\right]'=1-\frac{(x+1)'}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1}=0 \wedge x>-1 \Leftrightarrow x=0 \wedge x+1\neq 0 \wedge x>-1 \Leftrightarrow x=0$

x	-1		0	$+\infty$
f'	n. d.	$-$	0	$+$
f	n. d.	$\searrow$	0	$\nearrow$
			Mín.	

A função *f* é decrescente em $]-1, 0]$, crescente em $[0, +\infty[$ e tem um mínimo relativo em $x=0$.

8.3. Vimos em **8.1.** que a função f é contínua em $]-1, +\infty[$, pelo que é contínua em $[-0{,}9; 0]$ e em $[0; 2{,}2]$.

- Em $[-0{,}9; 0]$: $f(0{,}9)\approx 1{,}403>1$ e $f(0)=0<1$
- Em $[0; 2{,}2]$: $f(2{,}2)\approx 1{,}037>1$ e $f(0)=0<1$

Por aplicação do Teorema de Bolzano, conclui-se que a equação $f(x)=1$ tem pelo menos uma solução em cada um dos intervalos $]-0{,}9; 0[$ e $]0; 2{,}2[$.

Como em cada um destes intervalos a função *f* é monótona, então f tem uma única solução em $]-0{,}9; 0[$ e uma única solução em $]0; 2{,}2[$.

Assim, a equação $f(x)=1$ tem exatamente duas soluções no intervalo $]-0{,}9; 2{,}2[$.

9.

9.1. $s: y=mx+b$

$$m_s=m_r=g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-4\times 1=-5$$

Como a reta *s* passa no ponto de coordenadas $(1, 0)$, tem-se $0=-5\times 1+b \Leftrightarrow b=5$.

A equação reduzida da reta *s* é $y=-5x+5$.

9.2. $g''(x)=\left[g'(x)\right]'=\left[\cos(2x)-4\sin x\right]'=-2\sin(2x)-4\cos x \Leftrightarrow$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow -2\sin(2x)-4\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\times 2\sin x\cos x-4\cos x=0 \Leftrightarrow 4\cos x(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin x=-1 \overset{x\in]-\pi,\, \pi[}{\Leftrightarrow} x=-\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
g''	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	n.d.
g	n.d.	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	n.d.

O gráfico da função g tem:

- concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;
- concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- tem dois pontos de inflexão, cujas abcissas são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

10. O vértice S pode obter-se do vértice P pela rotação de centro O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$.

$$z_S = (2+5\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = (2+5\mathrm{i})\times(-\mathrm{i}) = -2\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2 = 5 - 2\mathrm{i}$$

11. Seja $z = a + bi$

$$z(1+\mathrm{i}) + \overline{z} = |3-4\mathrm{i}| - 2\mathrm{i}^3 \Leftrightarrow (a+b\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) + a - b\mathrm{i} = 5 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b\mathrm{i} + a\mathrm{i} - b + a - b\mathrm{i} = 5 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow (2a-b) + a\mathrm{i} = 5 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow$$

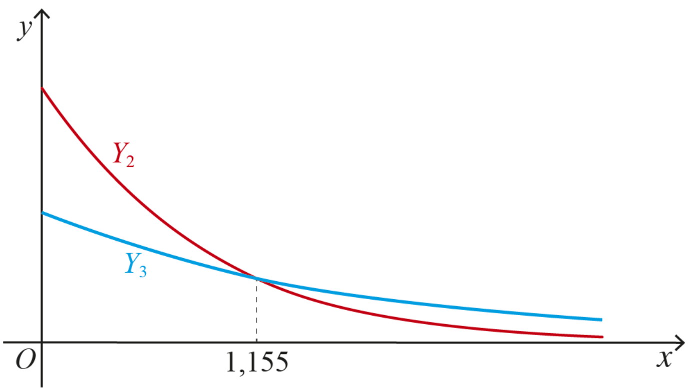
$$\Leftrightarrow 2a - b = 5 \wedge a = 2 \Leftrightarrow a = 2 \wedge b = -1$$

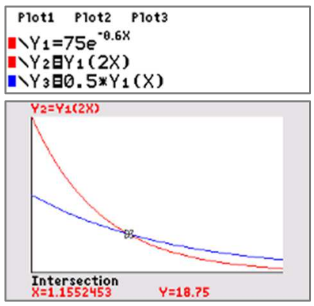
Logo, a solução da equação é $z = 2 - i$.

12. Pretende-se determinar a solução da equação $C(2a) = 0{,}5C(a)$, com $a > 0$

Na calculadora fizemos $y_1 = C(x) = 75e^{-0{,}6x}$, $y_2 = C(2x)$ e $y_3 = 0{,}5C(x)$

Determinamos, no intervalo $[0, 3]$, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de y_2 e y_3, tendo obtido o seguinte resultado:





Logo, $a \approx 1{,}155\ \text{h} \approx 1\ \text{h}\ 9\ \text{min}$. $0{,}155\ \text{h} = 0{,}155 \times 60\ \text{min} \approx 9\ \text{min}$