Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Uma empresa de *software* pretende contratar novos colaboradores para duas áreas específicas: design de produto e desenvolvimento de *software*.
No processo de recrutamento, foram pré-selecionados exclusivamente designers de produto e programadores de *software*.

Sabe-se que:

- $\frac{3}{4}$ dos candidatos eram programadores de *software*;
- o número de candidatos com menos de dois anos de experiência era o dobro do número de candidatos com pelo menos dois anos de experiência;
- $\frac{1}{3}$ dos candidatos com menos de dois anos de experiência eram designers de produto.

Seleciona-se, ao acaso, um dos candidatos que participaram no processo de recrutamento.

1.1. Determine a probabilidade de esse candidato ter pelo menos dois anos de experiência, sabendo-se que é programador de *software*.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. Durante a apresentação de um projeto, cinco programadores de *software* e quatro designers de produto (dois especialistas em *UX design* e dois em *visual design*) vão sentar-se nas duas primeiras filas de uma sala, onde cada fila tem cinco lugares, numerados de 1 a 5.

Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor as nove pessoas, mantendo os dois especialistas em *UX design* na mesma fila?

(A) $2 \times {}^5A_2 \times 7!$ **(B)** $2 \times {}^5A_2 \times 8!$

(C) $\frac{9!}{2!}$ **(D)** $2 \times 9!$

2. Seja S o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam G e H dois acontecimentos ($G \subset S$ e $H \subset S$).
Sabe-se que:

- $P(G \cup \overline{H}) = 0{,}75$
- $P(\overline{G} \cup \overline{H}) = 0{,}6$

Qual é o valor de $P(H)$?
Apresente o resultado na forma de percentagem.

3. A Câmara Municipal de Cabeceiras de Basto organizou um concurso literário, onde 50 alunos participaram com um conto de Natal cada um. Todos os contos foram classificados numa de três categorias etárias, como a seguir se descreve:

- 40% dos contos são de alunos com 16 anos ou mais;
- 30% são de alunos com mais de 10 anos e menos de 16 anos;
- os restantes são de alunos com 10 anos ou menos.

Para uma sessão de leitura pública, o júri selecionará, aleatoriamente, três contos, para serem lidos pela ordem de escolha.
A expressão seguinte permite determinar a probabilidade de ao selecionarmos, ao acaso, três dos 50 contos, no máximo, um seja de um aluno com 10 anos ou menos:

$$\frac{{}^{35}A_3 + {}^{35}C_2 \times 15 \times 3!}{{}^{50}A_3}$$

Explique esta expressão no contexto descrito.
Na sua resposta:

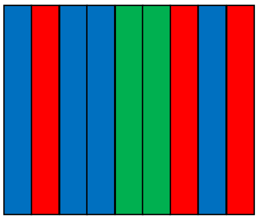
- enuncie a regra de Laplace;
- explique o número de casos possíveis;
- explique o número de casos favoráveis.

4. No âmbito de uma campanha de solidariedade, um professor pretende doar nove manuais de Matemática para o ensino secundário a duas instituições que apoiam escolas em países de língua oficial portuguesa. Quatro são do 10.º ano, três do 11.º e dois do 12.º.
Os manuais do mesmo ano de escolaridade são iguais e indistinguíveis.
O professor pretende dividir os manuais pelas duas instituições de modo que cada uma receba pelo menos um livro.

4.1. De quantas maneiras pode dividir os livros?

(A) 36 **(B)** 58 **(C)** 60 **(D)** 72

4.2. Para transportar os livros, o professor colocou-os, aleatoriamente, numa caixa, alinhados pelas lombadas, como é sugerido, através de um exemplo, na figura seguinte.



Qual é a probabilidade de os dois manuais do 12.º ano ficarem juntos e os três manuais do 11.º ano ficarem separados, isto é, não ficarem dois manuais do 11.º ano juntos?

5. Lança-se uma moeda de um euro, com face nacional e face europeia, quatro vezes e regista-se o resultado de cada lançamento.
Qual é a probabilidade de, em exatamente dois desses lançamentos, se obter face nacional?

(A) $\frac{3}{8}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

6. Do desenvolvimento de $(x+y-2)^{10}$, resulta um polinómio nas variáveis x e y.
Para responder às questões seguintes, considere $(x+y-2)^{10} = [x+(y-2)]^{10}$.

6.1. Um dos termos do desenvolvimento de $(x+y-2)^{10}$ é kx^4y^3, sendo k um número inteiro. Determine o valor de k.

6.2. Dos termos obtidos do desenvolvimento de $(x+y-2)^{10}$, selecionou-se, ao acaso um termo da forma kx^ny^n, sendo n um número inteiro não negativo.
Qual é a probabilidade de obter um termo em x^6y^6 ?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{1}{10}$ **(D)** $\frac{1}{11}$

7. Seja f uma função crescente e contínua no intervalo $]2,+\infty[$, tal que, $f(2)=5$.
Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida para um certo valor de k real por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-kx+2k-4}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ f(x) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Sabe-se que g é contínua no ponto 2.

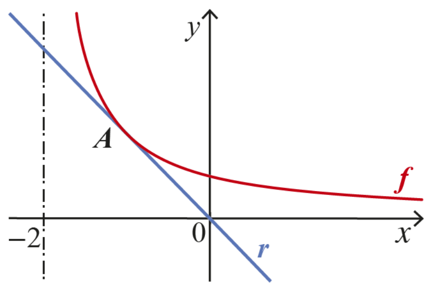
7.1. Mostre que $k=-1$.

7.2. Justifique que a equação $g(x)=\sqrt{17}$ tem pelo menos uma solução em $[1,3]$.

8. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, definida em $]-2,+\infty[$, por $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abcissa a;
- a reta de equação $x=-2$ é assíntota vertical ao gráfico de f ;
- a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{3\pi}{4}$.



8.1. Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ **(B)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(C) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ **(D)** $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 0$

8.2. Determine as coordenadas do ponto A.

9. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$.
A reta de equação $y=4x-1$ é uma assíntota ao gráfico de f.
Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{f(x)}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $+\infty$

FIM

Item														
Cotação (em pontos)														
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	**Total**
20	10	15	20	10	15	10	20	10	15	15	10	20	10	**200**

Proposta de resolução

1.

1.1. Relativamente ao candidato selecionado, sejam os acontecimentos:

A: «é programador de *software*»;

B: «tem pelo menos dois anos de experiência».

Assim:

$P(A) = \frac{3}{4}$

$P(\bar{B}) = 2P(B)$

$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{3}$

Pretende-se calcular $P(B|A)$.

- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(\bar{B}) = 2P(B) \Leftrightarrow 1 - P(B) = 2P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \times P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{B}$		$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$; $\frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Organizando os dados numa tabela de probabilidades (ao lado), conclui-se que a probabilidade pedida é $P(B|A) = \frac{\frac{11}{36}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{11}{36}}{\frac{27}{36}} = \frac{11}{27}$

1.2. Em cada uma das duas filas, tendo em conta que a ordem pela qual se sentam é relevante, os dois especialistas em *UX design* podem sentar-se em dois dos cinco lugares de cada uma das duas filas de $2 \times {}^5A_2$ maneiras diferentes. As restantes sete pessoas podem ocupar sete das oito cadeiras disponíveis de ${}^8A_7$ maneiras diferentes.

Aplicando o princípio da multiplicação, as nove pessoas podem sentar-se de $2 \times {}^5A_2 \times {}^8A_7$ maneiras diferentes.

Como ${}^8A_7 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 8!$

$2 \times {}^5A_2 \times {}^8A_7 = 2 \times {}^5A_2 \times 8!$

Opção correta: **(B)**

2. $P(H) = P(G \cap H) + P(\bar{G} \cap H)$

- $P(G \cup \bar{H}) = 0{,}75 \Leftrightarrow P\left(\overline{\bar{G} \cap H}\right) = 0{,}75 \Leftrightarrow P(\bar{G} \cap H) = 0{,}25$
- $P(\bar{G} \cup \bar{H}) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(\overline{G \cap H}) = 0{,}6 \Leftrightarrow P(G \cap H) = 0{,}4$

Logo, $P(H) = 0{,}25 + 0{,}4 = 0{,}65 = 65\%$.

3. Pela definição de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente do número de casos favoráveis a esse acontecimento pelo número de casos possíveis da experiência aleatória, sendo o número de casos possíveis acontecimentos elementares equiprováveis.

- 40% de 50: $0{,}4 \times 50 = 20$ Há 20 contos de alunos com 16 anos ou mais.
- 30% de 50: $0{,}3 \times 50 = 15$ Há 15 contos de alunos com mais de 10 anos e menos de16 anos.
- $50 - 20 - 15 = 15$ Há 15 contos de alunos com 10 anos ou menos.

Dos cinquenta contos, vai ser obtida uma sequência de três, pelo que o número de casos possíveis é ${}^{50}A_3$.

A sequência dos três contos poderá obter-se nas seguintes condições:

- Três contos dos 35 alunos com mais de 10 anos: ${}^{35}A_3$
- Dois contos dos 35 alunos com mais de 10 anos e um conto dos 15 alunos com 10 anos ou menos: ${}^{35}C_2 \times 15 \times 3!$ (ou ${}^{35}A_2 \times 15 \times 3$)

Por aplicação do princípio da adição, o número de casos favoráveis é ${}^{35}A_3 + {}^{35}C_2 \times 15 \times 3!$

Portanto, a expressão $\frac{{}^{35}A_3 + {}^{35}C_2 \times 15 \times 3!}{{}^{50}A_3}$ permite determinar a probabilidade de ao selecionarmos, ao acaso, três dos 50 contos, no máximo, um seja de um aluno com 10 anos ou menos.

4.

4.1. As possíveis distribuições pelas duas instituições são as seguintes:

- Livros do 10.º ano: $(0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0)$ $\rightarrow$ 5 possibilidades
  Uma das instituições pode ficar com 0, 1, 2, 3 ou 4 livros do 10.º ano e a outra fica com, respetivamente, os restantes.
- Livros do 11.º ano: $(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)$ $\rightarrow$ 4 possibilidades
  Uma das instituições pode ficar com 0, 1, 2 ou 3 livros do 11.º ano e a outra fica com, respetivamente, os restantes.
- Livros do 12.º ano: $(0,2), (1,1), (2,0)$ $\rightarrow$ 3 possibilidades
  Uma das instituições pode ficar com 0, 1 ou 2 livros do 12.º ano e a outra fica com, respetivamente, os restantes.

Com estas distribuições, há duas possibilidades de as instituições ficarem sem qualquer livro (uma ou outra), pelo que, no total, os livros podem ser distribuídos de

$5 \times 4 \times 3 - 2 = 58$ maneiras diferentes.

Opção correta: **(B)**

4.2. Considerando as nove posições onde podem ser colocados nove livros:

Número de casos possíveis: ${}^{9}C_4 \times {}^{5}C_3 = 1260$ (ou, $NCP = \frac{9!}{4! \times 3 \times 2!} = 1260$)

- Os livros do 10.º ano podem ser colocados em quatro de nove posições diferentes;
- Os livros do 11.º ano podem ser colocados em três das cinco posições restantes;
- Os três livros do 12.º ano são colocados nas duas posições disponíveis.

Tomando como referência os quatro livros do 10.º ano:

Número de casos favoráveis: $5 \times {}^{6}C_3 = 100$

- Relativamente aos livros do 10.º ano, o conjunto de livros do 12,º ano pode ficar em 5 posições distintas;
- De modo a ficarem separados, os 3 livros do 11.º ano podem ficar em 3 das 6 posições possíveis (nos extremos ou entre os quatro livros do 10.º ano e o conjunto de livros do 12.º ano) de ${}^{6}C_3$ maneiras diferentes.

A probabilidade pedida é $P = \frac{100}{1260} = \frac{5}{63}$.

5. Número de casos possíveis: $2^4 = 16$ Em cada lançamento da moeda há dois resultados possíveis.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2 = 6$ Trata-se de uma sequência com dois pares de elementos iguais (ex: NFFN).

A probabilidade pedida é: $P = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Opção correta: (A)

6.

6.1. $(x + y - 2)^{10} = [x + (y - 2)]^{10}$

$T_{p+1} = {}^{10}C_p \, x^{10-p}(y-2)^p$

O termo em x^4 obtém-se para $p = 6$: $T_7 = {}^{10}C_6 \, x^{10-6}(y-2)^6 = 210x^4(y-2)^6$.

Por sua vez, y^3 resulta do desenvolvimento de $(y - 2)^6$.

$T_{q+1} = {}^{6}C_q \, y^{6-q}(-2)^q$

O termo em y^3 obtém-se para $q = 3$: $T_4 = {}^{6}C_3 \, y^{6-3}(-2)^3 = -160y^3$

Portanto, o termo em x^4y^3 é $210x^4 \times (-160y^3) = -33600x^4y^3$.

Logo, $k = -33\,600$.

6.2. $T_{p+1} = {}^{10}C_p \, x^{10-p}(y-2)^p$

O termo em x^6 obtém-se para $p = 4$: $T_5 = {}^{10}C_4 \, x^6(y-2)^4 = 210x^6(y-2)^4$

y^6 teria de ser obtido do desenvolvimento de $(y-2)^4$, o que é impossível, pois a potência de y de maior expoente é y^4.

Logo, a probabilidade de obter um termo da forma x^6y^6 é igual a zero.

Opção correta: **(A)**

7.

7.1. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 5$

Como a função g é contínua em $x = 2$, então $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 5$.

	1	$-k$	$2k-4$
2		2	$4-2k$
	1	$2-k$	0

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-kx+2k-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-kx+2k-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2-k)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2-k) = 2+2-k = 4-k$

Logo, $4-k=5 \Leftrightarrow k=-1$.

7.2. Para $x<2$ e $k=-1$, $g(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$

Já sabemos que a função g é contínua em $[2,+\infty[$. Também é contínua em $]-\infty, 2[$, por se tratar de uma função racional e $x-2 \neq 0$ neste intervalo. Dado também ser contínua no ponto $x=2$, é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua em $[1,3]$.

$g(1) = \frac{1^2+1-6}{1-2} = 4$; $\quad g(3) > f(2) = 5$, pois em $[2,+\infty[$ a função f e, portanto, a função g, é crescente. $\quad \sqrt{17} \approx 4{,}12$

Como $g(1) < \sqrt{17} < g(3)$, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \,]1,3[$, tal que, $g(c) = \sqrt{17}$, ou seja, que a equação $g(x) = \sqrt{17}$ tem pelo menos uma solução em $]1,3[$.

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{+\infty+2} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-2+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Opção correta: (C)

8.2. Para $x \in \,]-2,+\infty[$, $f'(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)' = \frac{1'\times(x+2)-1\times(x+2)'}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$.

$f'(a) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) \wedge a > -2 \Leftrightarrow -\frac{1}{(a+2)^2} = -1 \wedge a > -2 \Leftrightarrow (a+2)^2 = 1 \wedge a > -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a=-1 \vee a=-3) \wedge a > -2 \Leftrightarrow a = -1$

$f(-1) = \frac{1}{-1+2} = 1$

Logo, as coordenadas do ponto A são $(-1, 1)$.

9. Como a reta de equação $y = 4x-1$ é assíntota ao gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^-$, sabemos que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 4$$

Assim: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{f(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+3}{x}}{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Opção correta: (C)

FIM