Proposta de prova-modelo

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos [junho 2025]

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.
Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
Apresente apenas uma resposta para cada item.
As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.
Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:
αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular:
Semiperímetro × *Apótema*

Área de um setor circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0,\ldots,n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

***1.** Seja (a_n) a sucessão definida por $a_n = \dfrac{3n - \cos(n)}{n}$.

Qual é o valor de $\lim a_n$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** Não existe

2. Na figura 1, está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, a pirâmide de base quadrada, $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- o vértice B é um ponto do eixo Oz;
- $[CV]$ é a altura da pirâmide;
- o vértice C (não visível na figura) tem coordenadas $(-2, -1, -3)$;
- o vértice V tem abcissa nula;
- a base da pirâmide, $[ABCD]$ está contida no plano α de equação $x + 2y + 2z + 10 = 0$.

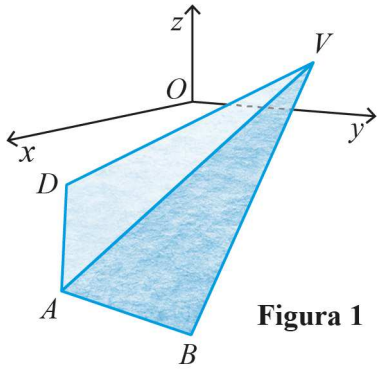


Figura 1

***2.1.** Determine o volume da pirâmide.

***2.2.** Qual é, em graus e com arredondamento às décimas, a amplitude do ângulo COP, sendo P um ponto pertencente ao semieixo positivo Oy?

(A) $105,5^\circ$ **(B)** $74,5^\circ$ **(C)** $-105,5^\circ$ **(D)** $-74,5^\circ$

3. Considere a construção de uma espiral formada por uma sucessão de quartos de circunferência, como parcialmente representado na figura 2.

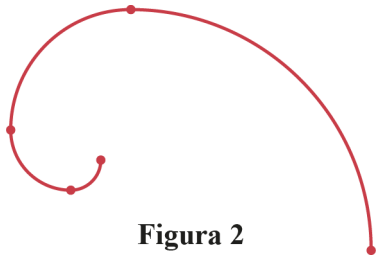


Figura 2

O primeiro quarto de circunferência tem raio igual a 1024 cm. A partir do segundo, o raio de cada quarto de circunferência é igual a metade do raio do quarto de circunferência anterior.

Sabendo que se constroem, sucessivamente, quartos de circunferência desta forma, determine quantos quartos de circunferência terão de ser sucessivamente construídos para que o comprimento da espiral obtida seja igual a 1023π cm.

4. Lança-se um dado cúbico equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, três vezes consecutivas.

Qual é a probabilidade de o produto dos números saídos ser um número par?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

***5.** A Dores tem 6 livros diferentes de Ficção Científica, 4 livros diferentes de Romance e 2 livros diferentes de Poesia.
Pretende escolher 5 destes livros para levar numa viagem, sendo que os 5 livros escolhidos devem ser todos do mesmo género.

De quantas maneiras diferentes pode a Dores fazer a sua escolha?

(A) ${}^6C_5 + {}^6C_5$

(B) ${}^6C_5 \times {}^6C_5$

(C) $6 + 4 + 2$

(D) 6

***6.** Numa fábrica de componentes eletrónicos, uma determinada máquina produz *microchips*. Sabe-se que 5% dos *microchips* produzidos por esta máquina são defeituosos.
Para controlar a qualidade, todos os *microchips* são submetidos a um teste automatizado.

Acerca do teste aplicado, sabe-se que:

- só há dois resultados possíveis: "Aprovado" ou "Rejeitado";
- se um *microchip* for defeituoso, a probabilidade de o teste o rejeitar (deteção correta) é de 98%;
- se um *microchip* não for defeituoso, a probabilidade de o teste o rejeitar (erro, ou "falso alarme") é de 3%.

Foi escolhido, ao acaso, um *microchip* produzido por esta máquina.

Sabendo que o teste o rejeitou, qual é a probabilidade de o *microchip* não ser defeituoso? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às décimas.

***7.** Na tabela seguinte, apresenta-se o número de horas de estudo semanal (x_i) e a classificação obtida no exame de Matemática A (y_i) por 15 alunos da uma turma.

x_i	3	5	2	7	4	6	3	4	6	2	1	6	5	2	4
y_i	10	14	8	17	11	15	9	12	19	8	4	16	16	7	14

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção selecionada.

A média do número de horas de estudo semanal destes 15 alunos é **I** horas.

A mediana das classificações obtidas é **II** valores.

A amplitude interquartil das classificações é **III** valores.

O coeficiente de correlação linear entre o número de horas de estudo e a classificação, arredondado às milésimas, é aproximadamente **IV** .

I	II	III	IV
a) 3,8	**a)** 11	**a)** 6	**a)** 0,955
b) 4	**b)** 12	**b)** 7	**b)** 0,911
c) 4,2	**c)** 13	**c)** 8	**c)** 1,759

***8.** O crescimento de uma árvore é aproximadamente modelado pela função

$$A(t) = 1,5\ln(t+1) + 0,5\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 0,2t,\ 0 \leq t \leq 5$$

sendo $A(t)$ a altura média da árvore, em metros, t anos após a sua plantação.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante um ano, a altura média da árvore aumentou 50 centímetros.
Apresente o resultado em anos com arredondamento às décimas.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, sem recorrer à calculadora, a inequação:

$$\log_3\left(x^2-4x+3\right)\leq 1+\log_3\left(x-1\right)$$

Apresente o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais.

10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{e^{x-2}-1} & \text{se } x<2\\ 4 & \text{se } x=2\\ \dfrac{4\ln(x-1)}{x-2} & \text{se } x>2\end{cases}$$

***10.1.** Mostre que a função f é contínua.

10.2. Justifique que a equação $f(x)=4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\frac{e}{2}, e\right[$.

***10.3.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as respetivas equações.

***11.** Seja f uma função diferenciável, de domínio $]-\pi, \pi[$, cuja derivada, f', é dada por:

$$f'(x)=x+2\cos x$$

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\mathrm{i}^{42}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

Escreva o complexo $w = z - \overline{z}$ na forma trigonométrica.

13. Na figura 3, está representado no plano complexo o pentágono regular $[ABCDE]$, cujos vértices pertencem à circunferência de raio 1, centrada na origem do referencial.

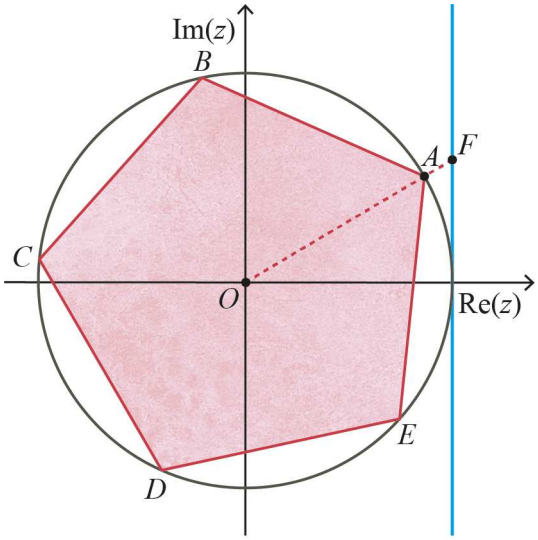


Figura 3

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E são os afixos das raízes quintas de um número complexo z, z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5, respetivamente;
- o ponto F é o ponto de interseção da reta $[OA]$ com a reta tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1, 0)$;
- o ponto E é o afixo do número complexo $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{7\pi}{30}}$.

13.1. Mostre que a área do pentágono $[ABCDE]$ é igual a $\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

***13.2.** O ponto F é o afixo do número complexo wz_1.

Em qual das seguintes opções se apresenta w, escrito na forma algébrica?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **(B)** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$ **(D)** $1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

***14.** Para um certo valor de $a \in \mathbb{R}$, considere a função f, definida em $\mathbb{R}^+$ por:

$$f(x) = x \ln x - ax$$

Seja x_0 o único zero da função f.

Mostre que o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é único e determine-o.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**10.1.**	**10.3.**	**11.**	**13.2.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**		**4.**		**9.**		**10.2.**		**12.**		**13.1.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3×14 pontos												**42**
TOTAL													**200**

Proposta de resolução

1. $\lim a_n = \lim \frac{3n-\cos(n)}{n} = \lim \frac{3n}{n} - \lim \frac{\cos(n)}{n} = \lim 3 - \lim\left[\frac{1}{n}\cos(n)\right] = 3-0=3$

$\lim\left[\frac{1}{n}\cos(n)\right]=0$, pois $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$ e a sucessão definida por $\cos(n)$ é limitada $\left(\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1\right)$.

Opção correta: **(C)**

2.1. O volume da pirâmide, $V_{[ABCDV]}$, é dado por $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Área da base (A_b)

Como o ponto B é o ponto de interseção do plano $\alpha: x+2y+2z+10=0$ com o eixo Oz,

$B(0, 0, z_B)$, $z_B \in \mathbb{R}$.

Assim, tem-se: $0+2\times 0+2\times z_B+10=0 \Leftrightarrow 2z_B=-10 \Leftrightarrow z_B=-5$.

Logo, $B(0, 0, -5)$, pelo que $A_b = \overline{BC}^2 = \left(\sqrt{(-2-0)^2+(-1-0)^2+(-3-(-5))^2}\right)^2 = 4+1+4=9$

$V(0, y, z)$ e $C(-2, -1, -3)$

$\vec{u}=(1,2,2)$ é um vetor normal ao plano α. Logo, $\overrightarrow{CV}$ é colinear com $\vec{u}$, ou seja,

$\overrightarrow{CV}=k(1,2,2)=(k,2k,2k)$, $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $\overrightarrow{CV}=V-C=(0, y, z)-(-2, -1, -3)=(2, y+1, z+3)$

Portanto, $k=2$ e $\overrightarrow{CV}=(2, 4, 4)$ pelo que, como $\overrightarrow{CV}=(2, y+1, z+3)$, vem $y+1=4 \Leftrightarrow y=3$ e $z+3=4 \Leftrightarrow z=1$

Portanto, $V(0, 3, 1)$.

Altura da pirâmide: $h=\|\overrightarrow{CV}\|=\sqrt{4+16+16}=6$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura $= \frac{1}{3}\times 9 \times 6 = 18$

2.2. $C\hat{O}P = \left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OV}}\right)$

$\overrightarrow{OC}(-2, -1, -3)$

Um vetor colinear ao vetor $\overrightarrow{OP}$ é $\overrightarrow{OC}(0, 1, 0)$.

Seja $\alpha = C\hat{O}P$.

$$\cos\alpha = \frac{(-2, -1, -3)\cdot(0, 1, 0)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{4+1+9} \times \sqrt{1}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Logo, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 105,5^\circ$

Opção correta: **(A)**

3. A sucessão dos comprimentos dos quartos de circunferência é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, cujo primeiro termo é $\frac{2\pi \times 1024}{4} = 512\pi$.

Como $S_n = 1023\pi$, vem:

$$512\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1023\pi \Leftrightarrow 512\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1023\pi \Leftrightarrow 1024\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1023\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1023\pi}{1024\pi} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1023}{1024} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1024} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \Leftrightarrow n = 10$$

Para que o comprimento da espiral seja igual a 1023π cm, é necessário adicionar 10 quartos de circunferência nas condições definidas no enunciado.

4. Relativamente à experiência do enunciado, seja A o acontecimento «o produto dos números saídos é um número par».

O acontecimento contrário de A é $\overline{A}$: «o produto dos números saídos é um número ímpar».

Como o produto dos números saídos é ímpar se os três forem ímpares, relativamente ao acontecimento $\overline{A}$, tem-se:

Número de casos possíveis: 6^3 (em cada lançamento, sai um dos seis números naturais)

Número de casos favoráveis: 3^3 (em cada lançamento, sai um dos 3 números ímpares)

Assim, $P(\overline{A}) = \frac{3^3}{6^3} = \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Logo, a probabilidade pedida é $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

5. Se pretende levar 5 livros do mesmo género, a Dores terá de levar, necessariamente, 5 dos 6 livros de Ficção Científica, ou seja, não levará um dos seis livros deste género, pelo que poderá fazer a escolha de 6 maneiras diferentes.

Opção correta: **(D)**

6. Sejam os acontecimentos:

D: «O *microchip* é defeituoso.»

R: «O resultado do teste foi "Rejeitado".»

Dados:

$P(D)=5\%=0,05$

$P(R|D)=98\%=0,98$

$P(R|\overline{D})=3\%=0,03$

Pretende-se calcular $P(\overline{D}|R)=\dfrac{P(\overline{D}\cap R)}{P(R)}$.

Dos dados obtidos, vem:

- $P(R|D)=\dfrac{P(R\cap D)}{P(D)}$; $\dfrac{P(R\cap D)}{0,05}=0,98\Leftrightarrow P(R\cap D)=0,98\times 0,05\Leftrightarrow P(R\cap D)=0,049$
- $P(R|\overline{D})=\dfrac{P(R\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$; $\dfrac{P(R\cap \overline{D})}{0,95}=0,03\Leftrightarrow P(R\cap \overline{D})=0,95\times 0,03\Leftrightarrow P(R\cap D)=0,028$

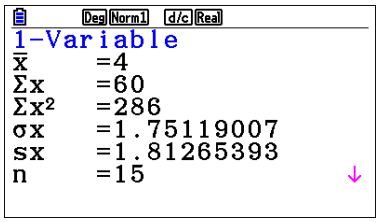
Organizando os dados numa tabela, tem-se:

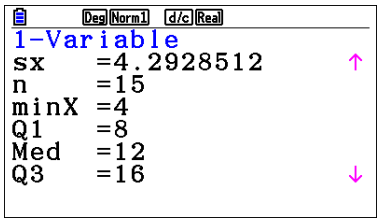
	R	$\overline{R}$	
D	$0,049$		$0,05$
$\overline{D}$	$0,0285$		$0,95$
	$0,0775$		1

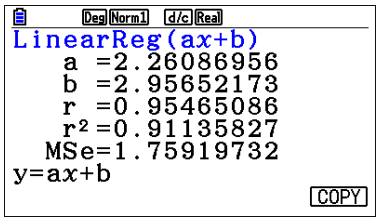
Portanto, $P(\overline{D}|R)=\dfrac{P(\overline{D}\cap R)}{P(R)}=\dfrac{0,0285}{0,0775}\approx 36,8\%$.

A probabilidade pedida é, aproximadamente, igual a $36,8\%$.

7.







I – b)

II – b)

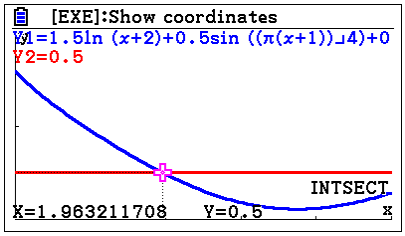
III – c)

IV – a)

8. A resposta ao problema é, por exemplo, a solução da equação $A(t+1)-A(t)=0,5$.

Na calculadora gráfica:

- $y_1=1,5\ln(t+2)+0,5\sin\left(\frac{\pi(t+1)}{4}\right)+0,2(t+1)-\left[1,5\ln(t+1)+0,5\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+0,2t\right]$
- $y_2=0,5$
- $x\in[0,\ 5]$
- $y\in[0,\ 1]$ (por exemplo)



Utilizando o comando adequado da calculadora, determinou-se a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos (imagem acima) e conclui-se que $t\approx 2,0$ anos.

Portanto, a árvore cresceu 50 centímetros, aproximadamente, durante o terceiro ano após ter sido plantada.

9. O conjunto-solução da inequação está contido no conjunto definido, em $\mathbb{R}$, pela condição:

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \vee x>3 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>3$$

Portanto, $x\in\ ]3,+\infty[$.

Resolvendo a inequação, vem:

$$\log_3\left(x^2-4x+3\right)\leq 1+\log_3(x-1) \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4x+3\right)\leq \log_3 3+\log_3(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-4x+3\right)\leq \log_3\left[3(x-1)\right] \Leftrightarrow x^2-4x+3\leq 3x-3 \Leftrightarrow x^2-7x+6\leq 0$$

Como $x^2-7x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 1\times 6}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=\frac{7\pm 5}{2} \Leftrightarrow x=1\vee x=6$,

$S=[1,\ 6]\cap\ ]3,\ +\infty[\ =\ ]3,\ 6]$

10.1. Dado que $D_f = \mathbb{R}$, a função é contínua em $]-\infty, 2[$ e em $]2, +\infty[$, uma vez que, em cada caso, se trata da composta, diferença e quociente de funções contínuas.

Para $x = 2$, tem-se:

- $f(2) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{e^{x-2}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{e^{x-2}-1} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{e^{x-2}-1} \times \lim\limits_{x\to 2^-} (x+2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{e^{x-2}-1} \times 4 \overset{y=x-2}{=}$

  (Considerando $y = x-2$, se $x \to 2^-$, $y \to 0^-$)

  $\overset{y=x-2}{=} \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{y}{e^y-1} \times 4 = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}} \times 4 = \dfrac{1}{1} \times 4 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

  (Considerando $y = \ln(x-1) \Leftrightarrow x-1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y + 1$, se $x \to 2^+$, $y \to 0^+$)

  $\overset{y=\ln\left(\frac{x+2}{4}\right)}{=} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{4y}{e^y+1-2} = 4 \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{y}{e^y-1} = 4 \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \dfrac{4}{1} = 4$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, então a função é contínua em $x = 0$.

Portanto, a função f é contínua.

10.2. $e \approx 2,72$ e $\dfrac{e}{2} \approx 1,36$

$f\left(\dfrac{e}{2}\right) = \dfrac{\left(\frac{e}{2}\right)^2 - 4}{e^{\frac{e}{2}-2} - 1} \approx 4,55$ e $f(e) = \dfrac{4\ln(e-1)}{e-2} \approx 3,01$

Como a função f é contínua em $\left[\dfrac{e}{2}, e\right]$, uma vez que é contínua em $\mathbb{R}$, e $f(e) < 4 < f\left(\dfrac{e}{2}\right)$, então, pelo teorema de Bolzano, a equação $f(x) = 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $\left]\dfrac{e}{2}, e\right[$.

10.3. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, então não admite qualquer assíntota vertical.

Como $D_f = \mathbb{R}$, vamos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{e^{x-2}-1} = \frac{+\infty}{0-1} = -\infty \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$y = \ln(x-1) \Leftrightarrow e^y = x-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = e^y + 1$
Se $x \to +\infty$, $y \to +\infty$

$$= 4\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y+1-2} = 4\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y-1} =$$

$$= 4\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{4}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y} - \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}} = \frac{4}{+\infty-0} = 0$$

Logo, o gráfico de f tem como única assíntota a reta de equação $y = 0$, quando $x \to +\infty$

11. $f'(x) = x + 2\cos x$

$f''(x) = (x + 2\cos x)' = 1 - 2\sin x$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin x = 0 \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f''	n.d.	+	0	–	0	+	n.d.
f	n.d.	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, \frac{\pi}{6}\right[$ e em $\left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$;
- tem concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$;
- tem dois pontos de inflexão, de abcissas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$.

12. $z=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\mathrm{i}^{42}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)\mathrm{i}^{2}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=\dfrac{-\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

$\left|-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

Seja $\operatorname{Arg}\left(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=\theta$

$\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}\\ \theta\in 3.^{\circ}\mathrm{Q}\end{cases}$ é um argumento de z.

Logo,

$z=\dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}=\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=$

$=-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

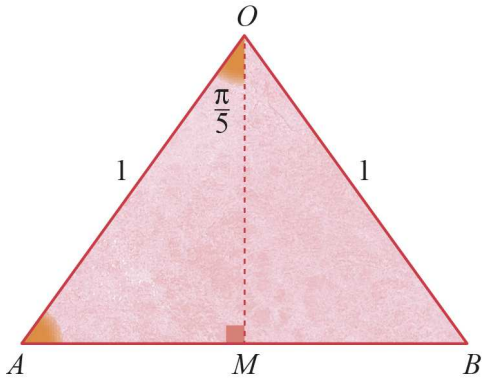
Assim:

$w=z-\overline{z}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ (por exemplo).

13.1. $A_{[ABCDE]}=5\times A_{[AOB]}$

$A\hat{O}B=\dfrac{2\pi}{5}$

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.



$A\hat{O}M=\dfrac{\pi}{5}$

Assim:

- $\overline{OM}=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
- $\overline{AM}=\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$, pelo que $\overline{AB}=2\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$
- $A_{[AOB]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OM}}{2}=\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}$

Portanto, $A_{[ABCDE]}=5\times\dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{5}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

13.2. $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{7\pi}{30} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{30} = \frac{\pi}{6}$, pelo que $F\left(1, \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ e $wz_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$

$$|wz_1| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Seja $\operatorname{Arg}(wz_1) = \theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 1.^{\circ}\text{Q} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$wz_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$wz_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow w e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow w = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Opção correta: **(B)**

14. $f(x) = x\ln x - ax$

Como x_0 é zero de f,

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 - ax_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(\ln x_0 - a) = 0 \overset{x_0 \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} \ln x_0 - a = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = a \Leftrightarrow x_0 = e^a$$

$$f'(x) = (x\ln x - ax)' = x'\ln x + x(\ln x)' - a = \ln x + x \times \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a$$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0, é $m_t = f'(x_0) = \ln x_0 + 1 - a$.

Como $x_0 = e^a$, vem $m_t = f'(x_0) = \ln e^a + 1 - a = a + 1 - a = 1$.

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa é igual a 1.