Teste de avaliação n.º 1

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome: | **N.º:** | **Turma:**

Duração do teste: 90 minutos | **Tolerância:** 10 minutos | **Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A Sofia tem, numa caixa, 8 velas de lavanda, 5 de baunilha e 3 de canela.
Quer encher um cesto com uma ou mais velas para oferecer à sua amiga Ana.
Sabendo que as velas do mesmo tipo são iguais entre si,
de quantas maneiras diferentes pode ser o conteúdo do cesto que a Sofia vai oferecer à Ana?

2. Um treinador de basquetebol tem 8 garrafas de água iguais para distribuir pelos 6 jogadores da sua equipa, antes de começar o jogo.
De quantas maneiras pode fazer a distribuição se cada jogador receber pelo menos uma garrafa?

3. De quantas formas diferentes se pode dividir um conjunto de 4 pessoas em dois grupos, cada um com 2 elementos?

(A) $4!$ **(B)** ${}^{4}A_{2}$ **(C)** ${}^{4}C_{2}$ **(D)** $\frac{{}^{4}C_{2}}{2}$

4. Na estante de uma biblioteca há:
- 4 livros diferentes sobre História, numerados de 1 a 4;
- 2 livros iguais sobre Matemática;
- 3 livros iguais sobre Geografia.

Quer-se colocar todos os livros numa fila na estante.
Quantas sequências diferentes de livros é possível formar?

(A) 120 **(B)** $10\,080$ **(C)** $15\,120$ **(D)** $30\,240$

5. Uma caixa contém 10 bolas numeradas de 1 a 10.
Serão realizadas quatro extrações, anotando-se o número da bola extraída e repondo--a novamente na caixa, formando um número de quatro algarismos.
Quantos desses números têm pelo menos dois algarismos iguais?

6. Numa empresa, está a decorrer um processo de recrutamento para um cargo. Os candidatos são divididos por sexo e experiência prévia:

	Candidatos com experiência	Candidatos sem experiência
Candidatos do sexo masculino	5	3
Candidatos do sexo feminino	4	2

Considere as proposições seguintes:

I. O número de "candidatos do sexo feminino ou com experiência" é igual ao número de "candidatos do sexo feminino" somado com o número de "candidatos com experiência".

II. Três dos candidatos passaram à segunda fase do processo de recrutamento: dois do sexo feminino e um do sexo masculino. O número de possibilidades para essa seleção é:

$$^{6}C_{2} \ + \ ^{8}C_{1}$$

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

7. Uma galeria vai colocar 5 quadros diferentes numa fila numa parede.

Dois desses quadros são de artistas específicos: um da Celeste e outro do Armindo.

Pretende-se que o quadro da Celeste fique sempre à esquerda do quadro do Armindo.

Sabe-se que o número de formas de organizar os quadros nessas condições pode ser dado por:

$$\frac{5!}{2} = 60$$

7.1. Explique cuidadosamente o raciocínio que conduz à expressão apresentada.

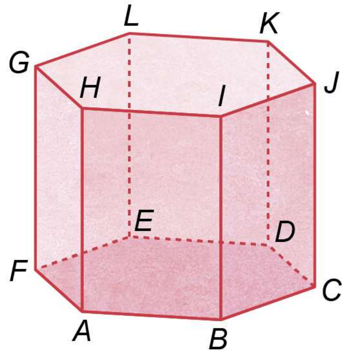
7.2. Começando por escolher a posição do quadro do Armindo na fila e depois colocando os restantes, obtém-se uma expressão diferente para o mesmo número de formas de dispor os 5 quadros em fila, com o da Celeste à esquerda do quadro do Armindo.

Apresente essa expressão e explique como pensou.

8. Considere o prisma hexagonal regular $[ABCDEFGHIJKL]$ representado na figura.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.



O número total de diagonais faciais do prisma hexagonal é **__I__** e o número total de diagonais é **__II__**.

Dispondo de seis cores diferentes, o número de maneiras de pintar as duas bases do prisma com a mesma cor e todas as faces laterais com cores diferentes da cor das bases é **__III__** .

Se quisermos colocar uma vogal em cada uma das 6 faces laterais do prisma, podemos fazê-lo de **__IV__** maneiras diferentes.

I	II	III	IV
a) 18	**a)** 48	**a)** 93 750	**a)** 13 255
b) 30	**b)** 30	**b)** 60 480	**b)** 15 625
c) 15	**c)** 66	**c)** 82 780	**c)** 18 000

9. Num grupo de estudantes de teatro, sabe-se que existem 210 maneiras diferentes de escolher um par de alunos para representar uma cena em dueto.

Quantos trios distintos de alunos é possível formar com esse grupo de estudantes de teatro?

10. Considere o desenvolvimento de $(1+2x)^{2k+1}$, com $k \in \mathbb{N}$.

Qual das seguintes expressões representa o coeficiente do termo em x^{k+1}?

(A) $^{2k+1}C_{k+1} \times 2^{k+1}$

(B) $^{2k+1}C_{k} \times 2^{k+1}$

(C) $^{2k+1}C_{k+1} \times 2^{k}$

(D) $^{2k+1}C_{k} \times 2^{k}$

11. No triângulo de Pascal, considere o número:

$$B = {}^{2k}C_k \ , k \geq 1$$

Sejam A e C os números imediatamente à esquerda e à direita de B na mesma linha.

Qual é o valor da razão:

$$\frac{B^2}{A \times C}$$

(A) $\frac{k+1}{k}$

(B) $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$

(C) $\frac{k}{k+1}$

(D) $\frac{2k+1}{2k-1}$

12. Considere os alunos de uma turma.

Redija, no contexto desta situação, um enunciado de um problema de cálculo combinatório, inventado por si, que admita como resposta correta:

$${}^{28}A_2 \times {}^{26}C_3$$

No enunciado que apresentar, deve explicitar claramente:

- o número total de alunos;
- o acontecimento cujo número de maneiras possíveis de ocorrer seja dado pela expressão apresentada.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**Total**
20	20	10	10	20	10	20	20	10	20	10	10	20	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1.

Velas de lavanda: 8 velas → pode escolher 0, 1, 2, …, 8 → 9 possibilidades

Velas de baunilha: 5 velas → pode escolher 0, 1, 2, …, 5 → 6 possibilidades

Velas de canela: 3 velas → pode escolher 0, 1, 2, 3 → 4 possibilidades

Como as escolhas são independentes, isto é, a Sofia pode escolher qualquer quantidade de lavanda, qualquer quantidade de baunilha e qualquer quantidade de canela, multiplicamos as possibilidades:

$$9 \times 6 \times 4 = 216$$

No entanto, este número inclui também a situação em que a Sofia não escolhe nenhuma vela e por isso retiramos esse caso:

$$216 - 1 = 215$$

O cesto da Sofia pode ser preenchido de 215 maneiras diferentes, garantindo que há pelo menos uma vela.

2. Como cada jogador tem de receber pelo menos uma garrafa, o treinador começa por dar uma garrafa a cada jogador. Ainda sobram $8 - 6 = 2$ garrafas.

Ou as duas garrafas que sobram vão para o mesmo jogador, o que pode acontecer de 6 maneiras diferentes, uma por jogador, ou as duas garrafas vão para jogadores diferentes, o que pode acontecer de ${}^6C_2 = 15$ maneiras.

Somando os dois casos, tem-se $6 + 15 = 21$.

O treinador pode fazer a distribuição de 21 maneiras diferentes.

3. Escolhendo 2 pessoas de entre 4, denominando-as por A, B, C e D, para formar o primeiro grupo, temos as seguintes 6 situações:

AB ⟶ sobra CD	AC ⟶ sobra BD	AD ⟶ sobra BC
CD ⟶ sobra AB	BD ⟶ sobra AC	BC ⟶ sobra AD

No entanto, repare-se que quando se forma um grupo, por exemplo, AB, também se forma o grupo CD, ou seja, cada divisão é contada duas vezes – uma vez para cada grupo considerado "primeiro".

Assim existem $\frac{6}{2} = \frac{{}^4C_2}{2} = 3$ formas diferentes de dividir um conjunto de 4 pessoas em dois grupos, cada um com 2 elementos.

Opção **(D)**

4.

- Livros de História

  Há 9 posições possíveis na fila.

  Precisamos de colocar os 4 livros diferentes de História em 4 dessas posições. Como os livros de História são diferentes, o número de formas de escolher as suas posições é: ${}^9A_4 = 3024$
- Livros de Matemática

  Restam $9 - 4 = 5$ posições para colocar os livros de Matemática, que são iguais.

  Número de formas de escolher as suas posições: ${}^5C_2 = 10$
- Livros de Geografia

  Sobram $5 - 2 = 3$ posições, que serão preenchidas pelos 3 livros de Geografia iguais.

  Como são iguais, há apenas uma única forma de colocar.

O número total de sequências é $3024 \times 10 \times 1 = 30\,240$.

Opção **(D)**

5.

- Total de números de 4 algarismos, sem restrições: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$
- Números com todos os algarismos diferentes: ${}^{10}A_4 = 5040$
- Números com pelo menos dois algarismos iguais: $10\,000 - 5040 = 4960$

Existem 4960 números de 4 algarismo que têm pelo menos dois algarismos iguais.

6.

I. Para saber o número de "candidatos do sexo feminino ou com experiência", ao número de "candidatos do sexo feminino" soma-se o número de "candidatos com experiência", mas é preciso subtrair o número de "candidatos do sexo feminino com experiência" que foram contados em duplicado.

II. É preciso combinar cada escolha de candidato do sexo feminino com cada escolha de candidato do sexo masculino. Assim, o número de hipóteses possíveis é ${}^{6}C_2 \times {}^{8}C_1$.

7.

7.1. Número total de formas de organizar os quadros sem restrições: $5! = 120$

Em metade dos arranjos possíveis, o quadro da Celeste aparece à esquerda do Armindo, e na outra metade, à direita do quadro do Armindo.

Assim, o número de formas de organizar os quadros nas condições referidas é:

$$\frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

7.2. Para que o quadro da Celeste fique à esquerda do quadro do Armindo, o quadro do Armindo não pode estar na posição mais à esquerda.

Assim, a posição do quadro do Armindo pode ser qualquer uma das 2.ª, 3.ª, 4.ª ou 5.ª posições, o que dá 4 possibilidades.

Depois de a posição do quadro do Armindo estar definida, o da Celeste pode ocupar qualquer posição à sua esquerda.

- se o quadro do Armindo está na 2.ª posição, o da Celeste só pode estar na 1.ª → 1 possibilidade.
- se o quadro do Armindo está na 3.ª posição, o da Celeste só pode estar na 1.ª ou 2.ª posições → 2 possibilidades.
- se o quadro do Armindo está na 4.ª posição, o da Celeste só pode estar na 1.ª, 2.ª ou 3.ª → 3 possibilidades.
- se o quadro do Armindo está na 5.ª posição, o da Celeste só pode estar na 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª → 4 possibilidades.

Total de escolhas para o quadro da Celeste: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ possibilidades.

Os 3 quadros restantes podem ocupar as posições restantes em qualquer ordem, ou seja, existem $3! = 6$ possibilidades.

Assim, no total, o número de formas de organizar os quadros nas condições do problema pode ser escrito como $(1 + 2 + 3 + 4) \times 3! = 10 \times 6 = 60$.

8.

I. Cada base do prisma tem 6 arestas.

Número de diagonais de cada base: ${}^{6}C_2 - 6 = 9$

Número de diagonais de cada face lateral: 2

Número total de diagonais faciais: $9 \times 2 + 2 \times 6 = 30$

II. O prisma tem $6 \times 3 = 18$ arestas.

Número total de diagonais: ${}^{12}C_2 - 18 = 48$

III. Existem 6 cores disponíveis para pintar as bases.

Cada face lateral pode ser pintada de 5 cores.

O número de maneiras de pintar as faces do prisma nas condições do enunciado é:

$6 \times 5^6 = 93\,750$.

IV. Cada face lateral pode ter uma de 5 vogais.

O número de maneiras diferentes de atribuir uma vogal a cada face é $5^6 = 15\,625$.

I – b)

II – a)

III – a)

IV – b)

9. Seja n o número total de estudantes.

Sabe-se que ${}^{n}C_2 = 210$.

Logo:

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 210 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 210 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 210 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 420 \Leftrightarrow n^2 - n - 420 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-420)}}{2 \times 1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n = 21}_{\in \mathbb{N}} \vee \underbrace{n = -20}_{\notin \mathbb{N}}$$

Conclui-se assim que o número total de estudantes é 21.

Assim, o número de trios distintos de alunos que é possível formar é ${}^{21}C_3 = 1330$.

10.

O termo geral é dado por ${}^{2k+1}C_p \times 1^{2k+1-p} \times (2x)^p = {}^{2k+1}C_p \times 2^p \times x^p$

Quer-se o termo em x^{k+1}, ou seja $p = k + 1$.

Logo, o coeficiente é ${}^{2k+1}C_{k+1} \times 2^{k+1}$

Opção **(A)**

11. $B = {}^{2k}C_k$, $A = {}^{2k}C_{k-1}$ e $C = {}^{2k}C_{k+1}$

$$\frac{B^2}{A \times C} = \frac{\left(\frac{(2k)!}{k!\,(2k-k)!}\right)^2}{\frac{(2k)!}{(k-1)!\,(2k-k+1)!} \times \frac{(2k)!}{(k+1)!\,(2k-k-1)!}} =$$

$$= \frac{(k-1)!\,(k+1)!\,(k+1)!\,(k-1)!}{(k!\,k!)^2} = \frac{(k-1)!\,(k+1)k!\,(k+1)k!\,(k-1)!}{k(k-1)!\,k(k-1)!\,k!\,k!} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+1)}{kk} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

Opção **(B)**

12. Por exemplo:

Numa turma de 28 alunos, vai organizar-se uma atividade de grupo para uma apresentação oral.

Primeiro, vão ser escolhidos 2 representantes da turma, um para coordenador e outro para subcoordenador do grupo.

Em seguida, dos 26 alunos restantes, serão escolhidos 3 alunos para formar uma equipa de apoio aos outros 2 alunos escolhidos.

De quantas maneiras diferentes é possível formar este grupo de 5 alunos?