Teste de avaliação n.º 2

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Nome:	**| N.º:**	**| Turma:**
Duração do teste: 90 minutos	**| Tolerância:** 10 minutos	**| Ano Letivo:** 2025/26

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

De dois acontecimentos A e B ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$), de probabilidade não nula, sabe-se que:

- $P(A) = P(B)$
- $P(A \cup B) = 4P(A \cap B)$

O valor de $P(A|B)$ é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

2. Um código de acesso a um cofre eletrónico é formado por quatro caracteres escolhidos entre 26 letras $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{Z})$ e 10 algarismos $(0, 1, 2, \ldots, 9)$.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II e III, seguido da opção, a), b) ou c), selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número de códigos que se podem formar com quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar é __I__.

O número de códigos que se podem formar com duas letras diferentes e dois algarismos diferentes (em qualquer ordem) é __II__.

Se um código é escolhido ao acaso de entre todas as sequências possíveis de 4 caracteres (letras ou algarismos, admitindo repetições), então a probabilidade de o código ter exatamente um algarismo 9 e uma letra X é igual a __III__.

I	II	III
a) 120 **b)** 625 **c)** 5 040	**a)** 365 040 **b)** 351 000 **c)** 405 600	**a)** $\frac{1}{99}$ **b)** $\frac{289}{419\,904}$ **c)** $\frac{289}{34\,992}$

3. Numa certa linha do triângulo de Pascal, o antepenúltimo elemento é 820. Escreveram-se os números dessa linha do triângulo de Pascal em cartões todos de diferentes cores.

Considere a experiência em que se escolhem, ao acaso, dois dos referidos cartões.

A probabilidade de serem escolhidos dois cartões com números iguais é igual a:

(A) $\frac{^{21}C_2}{^{42}C_2}$ **(B)** $\frac{1}{^{41}C_2}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{21}{^{42}C_2}$

4. De uma turma de $12.^{\text{o}}$ ano, com 30 alunos, sabe-se que:

- 40% dos alunos são raparigas;
- duas em cada três raparigas da turma não pretendem seguir um curso de Engenharia;
- 30% dos alunos são rapazes que pretendem seguir um curso de Engenharia.

4.1. Seleciona-se um aluno ao acaso, de entre os alunos da turma que pretendem seguir um curso de Engenharia.
Determine a probabilidade de ser selecionado um rapaz.
Apresente o valor na forma de fração irredutível.

4.2. Pretende-se selecionar quatro alunos da turma para formar uma comissão de finalistas. A Leocádia e o Gualter, dois alunos da turma, não podem fazer parte da comissão em simultâneo.
De quantas maneiras diferentes pode ser constituída a comissão de finalistas?

4.3. Sete rapazes e quatro raparigas foram escolhidos para posar para uma fotografia que vai representar a turma nas redes sociais.
De quantas maneiras diferentes podem aqueles 11 alunos fazê-lo, lado a lado, de forma que nenhuma rapariga fique ao lado de outra rapariga?

5. Considere duas caixas, C_1 e C_2.

A caixa C_1 tem 10 bolas, das quais seis são brancas e quatro são pretas.

A caixa C_2 tem 7 bolas, das quais duas são brancas e cinco são pretas.

5.1. Considere a experiência que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa C_1, colocá-las na caixa C_2 e, em seguida, retirar, também ao acaso, duas bolas da caixa C_2.

Considere os acontecimentos:

A: "As bolas retiradas da caixa C_1 têm cores diferentes."

B: "As bolas retiradas da caixa C_2 são brancas."

Numa pequena composição justifique, sem recorrer à fórmula da probabilidade condicionada, que o valor de $P(B|A)$ é igual a $\frac{{}^3C_2}{{}^9C_2}$.

Na sua resposta, tendo em conta o contexto descrito:

- interprete o significado de $P(B|A)$;
- explique o valor do numerador e do denominador da fração apresentada.

5.2. Admita agora que as bolas das caixas C_1 e C_2 foram colocadas num saco, ao qual se acrescentaram mais n bolas brancas.

Considere a experiência que consiste em extrair, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Determine o valor de n, sabendo que a probabilidade de ambas as bolas extraídas serem brancas é igual a $\frac{19}{42}$.

6. Seja E o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Mostre que: $P(\overline{A}|B) - P(A|\overline{B}) \times \frac{P(\overline{B})}{P(B)} + \frac{P(A)}{P(B)} = 1$.

7. Considere a função f, real de variável real, de domínio $]-\infty, 5[\,\setminus\{-3\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5x^2+4x}\ -\ 3x}{x^2+2x-3} & \text{se } x<1\ \wedge\ x\neq -3\\ \dfrac{x^3-4x^2+4x-1}{x^3+3x-4} & \text{se } 1<x<5\\ -\dfrac{1}{6} & \text{se } x=1\end{cases}$$

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos resolva os 2 itens seguintes.

7.1. Mostre que a função f é continua em $x=1$.

7.2. Determine as equações das assíntotas ao gráfico de f, paralelas aos eixos coordenados.

8. Seja f uma função real de variável real, de domínio $]-5, +\infty[$.

Sabe-se que a sua derivada, f', é definida analiticamente por $f'(x)=\frac{x+3}{(x+5)^2}$.

8.1. Qual é o valor do limite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{f(x)-f(2)}$?

(A) $-\frac{1372}{5}$ **(B)** $-\frac{196}{5}$ **(C)** $-\frac{49}{5}$ **(D)** $-\frac{343}{3}$

8.2. Considere a proposição:

"O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima, no intervalo $]1, 3[$."

Justifique que a proposição é falsa.

Na sua resposta, apresente uma razão que justifique a sua falsidade.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**Total**
10	10	10	20	20	10	20	20	20	20	20	10	10	**200**

SUGESTÃO DE RESOLUÇÃO

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 4P(A \cap B) = P(B) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 4P(A \cap B) + P(A \cap B) = 2P(B)$

$\Leftrightarrow 5P(A \cap B) = 2P(B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5}P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}P(B)}{P(B)} = \frac{2P(B)}{5P(B)} = \frac{2}{5}$$

Opção (C)

2. Temos 26 letras + 10 algarismos = 36 caracteres possíveis.

2.I) Para o produto de 4 algarismos ser **ímpar**, todos têm de ser ímpares. Algarismos ímpares: $\{1,3,5,7,9\} \rightarrow$ 5 algarismos.

Escolher 4 algarismos distintos de entre os 5 e ordená-los:

N.º de códigos $= {}^{5}A_{4} = 120$

2.II)

- Escolher 2 letras distintas: ${}^{26}C_2$
- Escolher 2 algarismos distintos: ${}^{10}C_2$
- Temos 4 caracteres distintos (2 letras + 2 algarismos).

  Número de permutações: $4! = 24$.
- Logo: $N = {}^{26}C_2 \times {}^{10}C_2 \times 4! = 351\,000$.

2.III)

- Número de casos possíveis: todos os códigos de 4 caracteres (letras ou algarismos, com repetições): 36^4.
- Queremos códigos com:

  - exatamente **um** algarismo 9

  - exatamente **uma** letra X

  - os outros 2 caracteres **não** podem ser nem 9 nem X

  Caracteres disponíveis sem 9 nem X: $36 - 2 = 34$

- Escolher posições do 9 e do X:
    - lugar do 9: 4 maneiras
    - lugar do X: 3 maneiras (nas restantes posições)

    $4 \times 3 = 12$.
- Os outros 2 lugares: cada um tem 34 possibilidades, com repetições permitidas: 34^2.
- Número de casos favoráveis $= 12 \times 34^2 = 13\,872$
- Probabilidade: $P = \frac{13\,872}{36^4} = \frac{289}{34\,992}$.

$I \longrightarrow (a) \quad ; \quad II \longrightarrow (b) \quad ; \quad III \longrightarrow (c)$

3. Antepenúltimo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 820: ${}^{n}C_{n-2} = 820$

Temos ${}^{n}C_{n-2} = 820 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 820$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\,2!} = 820$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 820$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 1640$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 1640 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1640)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 41 \ \vee n = -40$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 41$

Assim, a linha é a de ordem $n = 41$, com 42 elementos.

Como n é ímpar, todos os coeficientes aparecem aos pares.

Ou seja, há 21 pares de valores iguais, cada um com dois cartões.

Total de cartões: 42.

Total de pares de cartões que podemos escolher: ${}^{42}C_2$.

Casos favoráveis: há 21 pares de elementos iguais.

Logo: $P = \frac{21}{{}^{42}C_2}$

Opção (D)

4.

4.1. Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Ser rapariga" B: "Seguir um curso de engenharia"

$P(A) = 0{,}4$

$P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3}$

$P(\bar{A} \cap B) = 0{,}3$

$P(\bar{A}|B) = ?$

$P(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

	A	$\bar{A}$	
B	$\frac{2}{15}$	0,3	$\frac{13}{30}$
$\bar{B}$	$\frac{4}{15}$	0,3	$\frac{17}{30}$
	0,4	0,6	1

De $P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3}$, vem que $\frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap A) = \frac{2 \times 0{,}4}{3} \Leftrightarrow P(\bar{B} \cap A) = \frac{4}{15}$

$P(A \cap B) = 0{,}4 - \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$

$P(B) = \frac{2}{15} + 0{,}3 = \frac{13}{30}$

Assim, $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{\frac{13}{30}} = \frac{9}{13}$

4.2. Pretende-se escolher 4 alunos de 30, com a condição de que Leocádia e Gualter não podem estar ao mesmo tempo na comissão.

Total de comissões de 4 alunos: ${}^{30}C_4$

Comissões em que ambos pertencem à comissão:

- fixam-se Leocádia e Gualter;
- faltam escolher 2 alunos entre os restantes 28: ${}^{28}C_2$

Total de comissões: ${}^{30}C_4 - {}^{28}C_2 = 27027$

4.3. Temos 7 rapazes (R) e 4 raparigas (M), a posar lado a lado, com a condição de nenhuma rapariga poder ficar ao lado de outra rapariga.

Ordenar os 7 rapazes: 7! maneiras.

Ao colocar 7 rapazes, formam-se 8 "espaços" possíveis para encaixar raparigas: __ R __ R __ R __ R __ R __ R __ R __

São 8 lugares onde uma rapariga pode ser colocada, sem que nenhuma fique lado a lado com outra.

Escolher 4 desses 8 espaços para as 4 raparigas: ${}^{8}C_4$

Permutar as 4 raparigas entre si: 4!

Logo, temos $7! \times {}^{8}C_4 \times 4! = 8\,467\,200$

5.

5.1. No contexto descrito, $P(B|A)$ representa a probabilidade de as duas bolas retiradas de C_2 serem brancas, sabendo que as duas bolas retiradas de C_1 não têm a mesma cor. Inicialmente existiam na caixa C_2 duas bolas brancas e cinco pretas, mas como sabemos que foram retiradas duas bolas da caixa C_1 de cores diferentes, a caixa C_2 ficou com três bolas brancas e seis pretas.

Vão ser retiradas, simultaneamente, duas bolas ao acaso da caixa C_2, portanto o número de casos possíveis será dado por ${}^9C_2$. Como temos três bolas brancas, o número de casos favoráveis é dado por ${}^3C_2$.

Segundo a lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, sempre que os acontecimentos elementares são equiprováveis e em número finito.

Assim, $P(B|A) = \frac{{}^3C_2}{{}^9C_2}$.

5.2. Agora todas as bolas de C_1 e C_2 são misturadas num saco:

- Brancas: $6 + 2 = 8$
- Pretas: $4 + 5 = 9$
- Total: 17

Acrescentam-se n bolas brancas:

- Brancas: $8 + n$
- Pretas: 9
- Total: $17 + n$

Experiência: retirar duas bolas, ao acaso, sucessivamente e sem reposição.

Probabilidade de ambas serem brancas é igual a $\frac{19}{42}$:

$$P = \frac{(n+8)(n+7)}{(n+17)(n+16)} \Leftrightarrow \frac{(n+8)(n+7)}{(n+17)(n+16)} = \frac{19}{42}$$

$$\Leftrightarrow 42n^2 + 630n + 2352 = 19n^2 + 627n + 5168$$

$$\Leftrightarrow 23n^2 + 3n - 2816 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\times 23\times(-2816)}}{2\times 23}$$

$$\Leftrightarrow n = 11 \ \vee n = -\frac{256}{23}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 11$.

6. $P(\overline{A}|B) - P(A|\overline{B}) \times \frac{P(\overline{B})}{P(B)} + \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} - \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \times \frac{P(\overline{B})}{P(B)} + \frac{P(A)}{P(B)}$

$$= \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} - \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(B)} + \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\overline{A}\cap B) - P(A\cap\overline{B}) + P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A\cap B) - \left(P(A) - P(A\cap B)\right) + P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A\cap B) - P(A) + P(A\cap B) + P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

7.

7.1. A função f é contínua em $x = 1$, se $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

- $f(1) = -\frac{1}{6}$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3-4x^2+4x-1}{x^3+3x-4}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2-3x+1)}{(x-1)(x^2+x+4)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+1}{x^2+x+4}$$

$$= \frac{1-3+1}{1+1+4} = -\frac{1}{6}$$

	1	-4	4	-1
1		1	-3	1
	1	-3	1	0

	1	0	3	-4
1		1	1	4
	1	1	4	0

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{5x^2+4x}-3x}{x^2+2x-3}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{\sqrt{5x^2+4x}-3x}{(x-1)(x+3)} \times \frac{\sqrt{5x^2+4x}+3x}{\sqrt{5x^2+4x}+3x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{5x^2+4x-9x^2}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{5x^2+4x}+3x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-4x(x-1)}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{5x^2+4x}+3x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-4x}{(x+3)\left(\sqrt{5x^2+4x}+3x\right)}$$

$$= \frac{-4\times 1}{(1+3)\left(\sqrt{5+4}+3\right)}$$

$$= \frac{-4}{4\times 6} = -\frac{1}{6}$$

	1	2	-3
1		1	3
	1	3	0

Logo, a função f é contínua em $x = 1$.

7.2. Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{\sqrt{5x^2+4x}-3x}{x^2+2x-3} = \frac{\sqrt{33}+9}{0^-} - \infty$$

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico da função f.

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{x^3-4x^2+4x-1}{x^3+3x-4} = \frac{44}{136} \in \mathbb{R}$$

A reta de equação $x = 5$ não é assíntota vertical ao gráfico da função f.

O gráfico da função f não tem outras assíntotas verticais, porque a função é contínua em $]-\infty, 5[\ \backslash\ \{-3\}$.

Assíntotas horizontais:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5x^2+4x}-3x}{x^2+2x-3} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(5+\frac{4}{x}\right)} - 3x}{x^2+2x-3} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{5+\frac{4}{x}} - 3x}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{5+\frac{4}{x}} - 3x}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{5+\frac{4}{x}} - 3\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{5+\frac{4}{x}} - 3}{x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \\
&= \frac{-\sqrt{5+0} - 3}{-\infty(1+0-0)} \\
&= \frac{-\sqrt{5}-3}{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$.

8.

8.1. $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{2+3}{(2+5)^2} = \frac{5}{49}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{f(x)-f(2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2+x)}{f(x)-f(2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)(2+x)}{f(x)-f(2)}$$

$$= -\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{f(x)-f(2)} \times \lim_{x\to 2} (x+2)$$

$$= -\frac{1}{f'(2)} \times (2+2) =$$

$$= -\frac{49}{5} \times (2+2) = -\frac{196}{5}$$

Opção (B)

8.2. Como $f'(x) = \frac{x+3}{(x+5)^2}$, então $f''(x) = \left(\frac{x+3}{(x+5)^2}\right)'$

$$\left(\frac{x+3}{(x+5)^2}\right)' = \frac{(x+3)'(x+5)^2 - (x+3)\left((x+5)^2\right)'}{((x+5)^2)^2}$$

$$= \frac{1(x+5)^2 - (x+3)(2(x+5)\times 1)}{(x+5)^4}$$

$$= \frac{(x+5)^2 - 2(x+3)(x+5)}{(x+5)^4}$$

$$= \frac{(x+5)[(x+5) - 2(x+3)]}{(x+5)^4}$$

$$= \frac{x+5 - 2x-6}{(x+5)^3}$$

$$= \frac{-x-1}{(x+5)^3}$$

No intervalo $]1,3[$,

$-x-1<0$ e $(x+5)^3>0$ e, portanto, $f''(x)<0\,,\ \forall x \in]1,3[$.

Como $f''(x)<0\,, \forall x \in]1,3[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo, no intervalo $]1,3[$.

Assim, a proposição dada é falsa.