Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **| Data:** FEVEREIRO 2024

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja S o espaço amostral (espaço de resultados) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

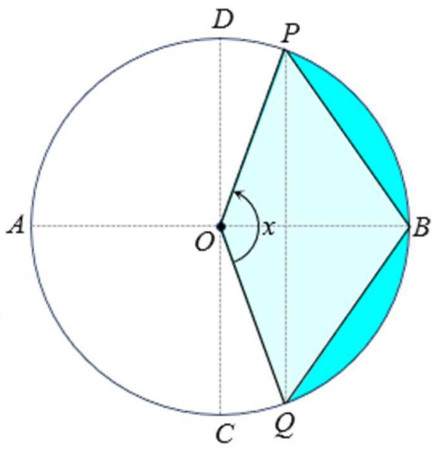
- A e B são acontecimentos independentes e equiprováveis;
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,81$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) 0,1 **(B)** 0,9 **(C)** 0,5 **(D)** 0,19

2. Na figura está representada uma circunferência de centro O e raio 2 em que $[AB]$ e $[CD]$ são diâmetros perpendiculares.
Considere que o ponto P se desloca sobre o arco BD de tal forma que:

- o ponto Q acompanha o movimento do ponto P sendo o transformado deste na reflexão de eixo AB;
- o ângulo ao centro QOP tem x radianos de amplitude $\left(x \in \left]0, \pi\right[\right)$.



Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{s}$ as funções que a cada valor de x fazem corresponder a área do quadrilátero $[OQBP]$ e a área do setor circular QOP, respetivamente.

2.1. Mostre que $a(x) = 4\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, e $s(x) = 2x$, $x \in \left]0, \pi\right[$.

2.2. Considere o polígono obtido para $x = \pi$. Mostre que a sua área ainda é dada por $a(x)$.

2.3. Determine $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a(x)}{s(x)}$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-e^{x}-2x}{x} & \text{se } x<0 \\ k & \text{se } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2x} & \text{se } x>0 \end{cases}$ $\quad (k \in \mathbb{R})$

3.1. Qual é o valor de k para o qual a função h é contínua no ponto $x=0$?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 0

(D) h é descontínua no ponto $x=0$ qualquer que seja o valor de k

3.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

4. Numa fábrica, foi instalado um exaustor para eliminar o dióxido de carbono (CO_2) em excesso. Para testar o exaustor, instalado num recinto fechado, injetou-se CO_2 a uma razão constante durante um certo tempo.

Decorrido algum tempo após se iniciar a injeção de CO_2, ligou-se o exaustor durante 25 minutos. Admira que t minutos após o exaustor ser ligado, a taxa de CO_2 existente nesse recinto, em percentagem (100% = 1), é dada por

$$d(t)=(0{,}8t+0{,}4)e^{-0{,}5t}+0{,}04,\ 0\le t\le 25$$

4.1. Qual era a taxa de CO_2 existente no ambiente da fábrica no instante em que o exaustor foi ligado?

(A) 44 % **(B)** 4,4 % **(C)** 0,44 % **(D)** 0,044 %

4.2. Estude a função d quanto à monotonia para determinar o valor da taxa máxima de CO_2 que foi atingida bem como o instante em que ocorreu.

Apresente o valor da taxa de CO_2 em percentagem arredondada às unidades.

4.3. Para que o exaustor seja considerado eficiente pretende-se que a taxa de CO_2 existente nesse ambiente se situe abaixo de 4,5 % nos primeiros 20 minutos de funcionamento.

Este objetivo foi concedido?

Para responder a esta questão, utilize as capacidades gráficas da calculadora
Reproduza o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial e apresente as abcissas dos pontos que tiver de calcular arredondadas às centésimas.

5. Seja g uma função de domínio $]-\infty\, ,\, \pi[$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases} e^{2x}-7e^{x} & \text{se } x\leq 0 \\ \sin(2x)-x & \text{se } 0<x<\pi \end{cases}$$

5.1. Estude a função g quanto à monotonia e existência de extremos relativos no intervalo $]0\, ,\, \pi[$.

5.2. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o gráfico da função g .

Existe nesse gráfico um ponto A, de abcissa negativa, em que a reta tangente é paralela à reta tangente ao mesmo gráfico no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

Determine a abcissa de A .

6. Considere, para cada $a\in\mathbb{R}^+$ a função f_a , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f_a(x)=x+a\,e^{-x}$.

6.1. Mostre que para cada $a\in\mathbb{R}^+$ a função f_a admite um mínimo para $x=\ln a$.

6.2. Mostre que para cada $a\in\mathbb{R}^+$, o ponto do gráfico correspondente ao mínimo de f_a , ou seja, o ponto de abcissa $x=\ln a$, pertence à reta de equação $y=x+1$

Cotações:

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	
10	20	15	15	10	15	10	20	20	15	20	15	15	**200**

Proposta de resolução

1. $P(A)=P(B)$ Os acontecimentos A e B são equiprováveis.

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ Os acontecimentos A e B são independentes.

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}81 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0{,}81 \Leftrightarrow$

$P(A\cup B)=1-0{,}81 \Leftrightarrow P(A\cup B)=0{,}19$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ | $P(A)=P(B)$ e $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$0{,}19=P(A)+P(A)-P(A)\times P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[P(A)\right]^2-2P(A)+0{,}19=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)=0{,}1 \vee P(A)=1{,}9$

Como $0\le P(A)\le 1$, $P(A)=0{,}1$

Cálculo auxiliar

$x^2-2x+0{,}19=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\times 0{,}19}}{2} \Leftrightarrow$

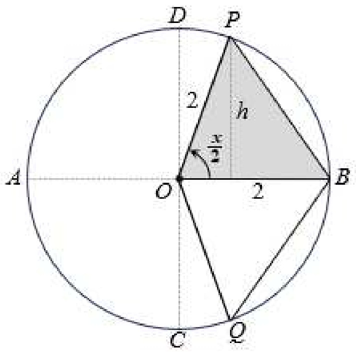
$\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{3{,}24}}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm 1{,}8}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0{,}1 \vee x=1{,}9$

Resposta: (A)

2.

2.1. Seja h a altura do triângulo $[OBP]$ relativa à base $[OB]$.



$$\frac{h}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow h=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A_{[OBP]}=\frac{2\times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

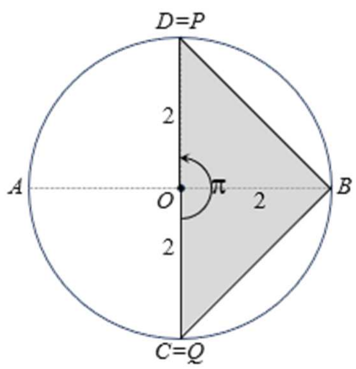
$$A_{[OQBP]}=2\times A_{[OBP]}=2\times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo, $a(x)=4\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$A_{\text{setor } QOP}=\frac{x\times 2^2}{2}=2x$$ | $A_{\text{setor}}=\dfrac{\alpha\times r^2}{2}$

Logo, $s(x)=2x$.

2.2. Se $x=\pi$, P e Q coincidem com D e C, respetivamente.



O polígono obtido é o triângulo $[DCB]$ cuja área é:

$$\frac{\overline{CD}\times\overline{OB}}{2}=\frac{4\times 2}{2}=4 \text{ e}$$

$$a(\pi)=4\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=4\times 1=4$$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a(x)}{s(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\times\frac{x}{2}}=\dfrac{2}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ $\qquad$ $y=\dfrac{x}{2}$; Se $x\to 0$, $y\to 0$

Quando $x\to 0$, a área do quadrilátero $[OQBP]$ tende a igualar a área do setor circular QOP pelo que o quociente $\dfrac{a(x)}{s(x)}$ tende para 1.

3. $$h(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-e^{x}-2x}{x} & \text{se } x<0\\ k & \text{se } x=0\\ \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

3.1. $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-e^{x}-2x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x}-\dfrac{2x}{x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{x}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{x}\times\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x}-1}{x}-2=1\times 1-2=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\sqrt{4x+1}-1\right)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(4x+1)-1}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=$

$=\dfrac{4}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{4x+1}+1}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$, a função h é descontínua no ponto $x=0$ qualquer que seja o valor de k.

Resposta: (D)

3.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-e^x-2x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{2x}-e^x}{x} - \dfrac{2x}{x}\right) =$ $\quad\left|\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\right.$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-e^x}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = 0-2=-2$$

A reta de equação $y=-2$ é uma assíntota ao gráfico de h quando $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+1}-1}{2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)}{x} =$$ $\quad\left|\ \text{Quando } x\to+\infty,\ |x|=x\right.$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\times 0 = 0$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota ao gráfico de h quando $x\to+\infty$.

4. $d(t) = (0{,}8t+0{,}4)e^{-0{,}5t}+0{,}04$, $0\le t\le 25$

4.1. $d(0) = (0{,}8\times 0+0{,}4)e^{-0{,}5\times 0}+0{,}04 = 0{,}4\times 1+0{,}04 = 0{,}44$

$$0{,}44 = \frac{44}{100} = 44\%$$

Resposta: (A)

4.2. $d'(t) = \left[(0{,}8t+0{,}4)e^{-0{,}5t}+0{,}04\right]' =$

$$= (0{,}8t+0{,}4)'\,e^{-0{,}5t} + (0{,}8x+0{,}4)\left(e^{-0{,}5t}\right)' =$$

$$= 0{,}8e^{-0{,}5t}\times(0{,}8t+0{,}4)+(-0{,}5)\left(e^{-0{,}5t}\right) =$$

$$= e^{-0{,}5t}\left[0{,}8+(0{,}8t+0{,}4)\times(-0{,}5)\right] =$$

$$= e^{-0{,}5t}(0{,}8-0{,}4t-0{,}2) = e^{-0{,}5t}(0{,}6-0{,}4t)$$

$d'(t)=0 \Leftrightarrow e^{-0{,}5t}(0{,}6-0{,}4t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}5t}=0 \lor 0{,}6-0{,}4t=0 \Leftrightarrow$ $\qquad e^{-0{,}5t}\neq 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 0{,}4t=0{,}6 \Leftrightarrow t=\dfrac{0{,}6}{0{,}4} \Leftrightarrow t=1{,}5$ $\qquad 0\le 1{,}5\le 25$

$d(1{,}5) = (0{,}8\times 1{,}5+0{,}4)e^{-0{,}5\times 1{,}5}+0{,}04 \approx 0{,}796$

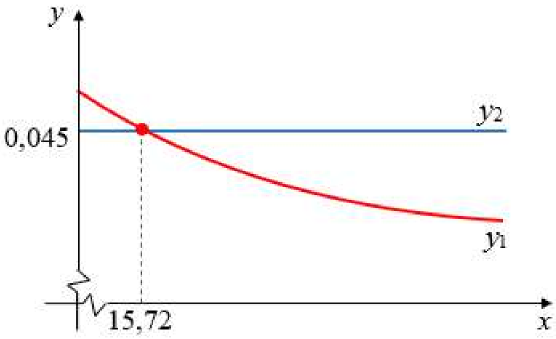
t	0		1,5		25
g'		+	0	–	
g	0,44	↗		↘	
	Mín		Máx.		Mín.

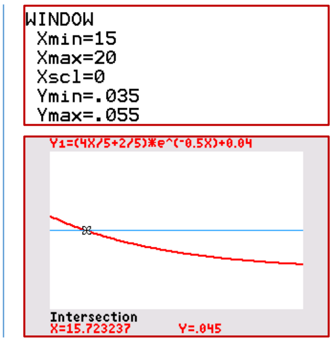
A taxa máxima de CO_2 foi cerca de 80% e foi atingida 1,5 min, ou seja, 1 min e 30 s após o exaustor ter sido ligado.

4.3. Pretende-se resolver a inequação $d(t) < 0{,}045$.

Começamos por determinar, recorrendo à calculadora e escolhendo uma janela de visualização adequada, a abcissa do ponto de interseção do gráfico da função dada – $y_1 = d(x) = (0{,}8x + 0{,}4)e^{-0{,}5x} + 0{,}04$ – com a reta de equação $y_2 = 0{,}045$.

Foi obtido o seguinte resultado:





Como a função é decrescente para $t \geq 1{,}5$, podemos concluir que a partir dos 15,72 minutos, ou seja, a partir dos 15 min e 43 s, a taxa de CO_2 existente nesse ambiente se situou abaixo de 4,5 %. Logo, o exaustor pode ser considerado eficiente.

5. $g(x) = \begin{cases} e^{2x} - 7e^{x} & \text{se } x \leq 0 \\ \sin(2x) - x & \text{se } 0 < x < \pi \end{cases}$

5.1. No intervalo $]0, \pi[$,

$$g'(x) = (\sin(2x) - x)' = 2\cos(2x) - 1$$

$$g'(x) = 0 \land x \in]0, \pi[\Leftrightarrow 2\cos(2x) - 1 = 0 \land x \in]0, \pi[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \land 2x \in]0, 2\pi[\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \lor 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \lor 2x = \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \lor x = \frac{5\pi}{6}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$	

A função g é estritamente crescente em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$ e estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. A função g tem máximo relativo para $x = \frac{\pi}{6}$ e um mínimo relativo para $x = \frac{5\pi}{6}$.

5.2. O declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ é igual a $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)-1=2\cos\pi-1=2\times(-1)-1=-3$$

Trata-se de determinar, no intervalo $]-\infty,0[$, a solução da equação $g'(x)=-3$.

Em $]-\infty,0[$, $g'(x)=\left(e^{2x}-7e^{x}\right)'=2e^{2x}-7e^{x}$.

$$g'(x)=-3\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x}-7e^{x}=-3\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(e^{x}\right)^2-7e^{x}+3=0\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x}=\frac{2}{4}\vee e^{x}=3\right)\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=\ln\frac{1}{2}\vee x=\ln 2\right)\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 2^{-1}\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

Cálculo auxiliar:

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times3\times2}}{4}\wedge x\in]-\infty,0[$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{7\pm5}{4}\wedge x\in]-\infty,0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(e^{x}=\frac{2}{4}\vee e^{x}=3\right)\wedge x\in]-\infty,0[$$

$\ln 2>0$

A abcissa de A é $x=-\ln 2$.

6. $f_a(x)=x+a\,e^{-x}$

6.1. $f_a'(x)=1+a\times\left(-e^{-x}\right)=1-a\,e^{-x}$

$$f_a'(x)=0\Leftrightarrow 1-a\,e^{-x}=0\Leftrightarrow a\,e^{-x}=1\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x=\ln\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow -x=\ln a^{-1}\Leftrightarrow -x=-\ln a\Leftrightarrow x=\ln a$$

x	$-\infty$	$\ln a$	$+\infty$
$f_a'(x)$	$-$	0	$+$
$f_a(x)$	↘		↗
		Mín.	

Cálculo auxiliar:

$$f_a'(x)<0\Leftrightarrow 1-a\,e^{-x}<0\Leftrightarrow a\,e^{-x}>1\Leftrightarrow e^{-x}>\frac{1}{a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x>\ln\left(\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow -x>-\ln a\Leftrightarrow x<\ln a$$

Para cada $a\in\mathbb{R}^+$, a função f_a é decrescente em $]-\infty,\ln a]$ e crescente em $[\ln a,+\infty[$.
Logo, para cada $a\in\mathbb{R}^+$ a função f_a admite um mínimo para $x=\ln a$.

6.2. $f_a(\ln a)=\ln a+a\,e^{-\ln a}=\ln a+a\,e^{\ln a^{-1}}=\ln a+a\times a^{-1}=\ln a+1$

O ponto do gráfico correspondente ao mínimo de f_a tem coordenadas $(\underbrace{\ln a}_{x},\underbrace{\ln a+1}_{y=x+1})$, ou seja, pertence à reta de equação $y=x+1$.