Proposta de teste de avaliação

Matemática A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 150 minutos **| Data:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja S, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.
Sejam A e B acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(A) = 0,4$
- $P(B) = 0,6$
- $P(A \cup B) = 0,8$

1.1. O valor da probabilidade condicionada $P(A \mid B)$ é:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

1.2. Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(\overline{A \cap B} \mid A\right)$.

2. Numa escola do 1.º ciclo verificou-se que 20% dos alunos eram estrangeiros. Sabe-se ainda que, nessa escola, 15% dos alunos estrangeiros têm 10 ou mais anos de idade e, entre os alunos nacionais, apenas 5% têm idade igual ou superior a 10 anos.

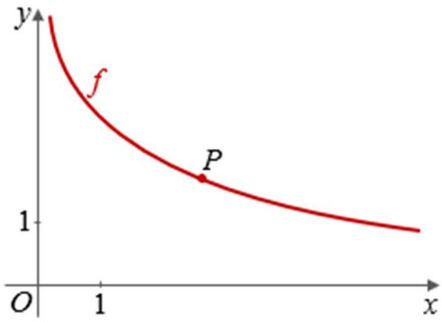
Um aluno dessa escola vai ser selecionado ao acaso. Qual é a probabilidade de esse aluno ser estrangeiro ou ter idade superior ou igual a 10 anos?

3. O segundo elemento de uma linha do triângulo de Pascal é igual a 20.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

A probabilidade de pelo menos um desses dois elementos ser maior do que 1000 é igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{35}{38}$ **(C)** $\frac{13}{14}$ **(D)** $\frac{3}{7}$

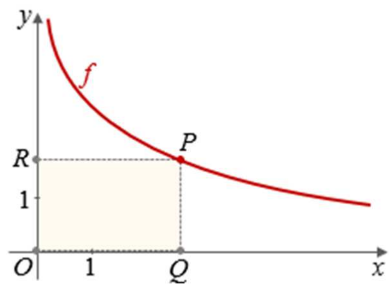
4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ e representada graficamente no referencial Oxy da figura seguinte.



O ponto P pertence ao gráfico da função f.

4.1. Admita que os pontos Q e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente, de tal forma que $[OQPR]$ é um retângulo.

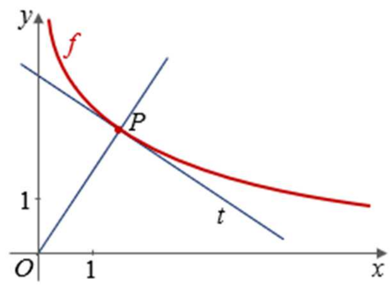
Determine as coordenadas do ponto P para as quais a área do retângulo $[OQPR]$ é máxima.



4.2. Considere agora que a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P, é perpendicular à reta OP.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P que se sabe pertencer ao intervalo $]0,5[$.

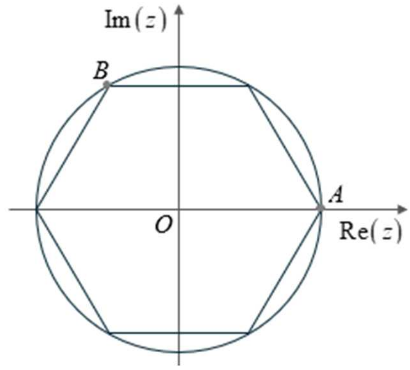
Apresente o valor obtido arredondado às centésimas.



Na sua resposta deve:

- apresentar a equação que lhe permite resolver o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

5. Na figura, está representado, no plano complexo, um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro O, origem do referencial, e raio 1.



Os pontos A e B são os vértices do hexágono, tais que:

- o ponto A pertence ao semieixo real positivo;
- o ponto B é o afixo de um número complexo z.

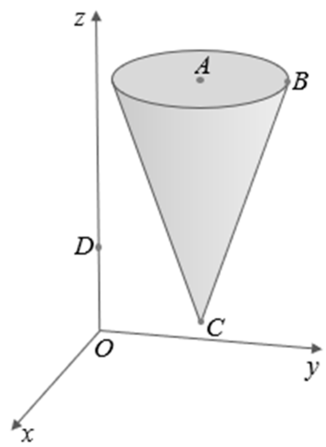
Qual dos seguintes números complexos é igual a $\overline{z}$, conjugado de z?

(A) $-z^4$ **(B)** z^3 **(C)** z^2 **(D)** $-z^2$

6. Em $\mathbb{C}$, sabe-se que w é um número complexo cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante e que $\frac{\mathrm{i}-\sqrt{3}}{w^2}=2\mathrm{i}$.

Determine w, na forma $a+b\mathrm{i}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Na figura, está representado, num referencial o. n. $Oxyz$, um cone reto.



Sabe-se que:

- o vértice do cone é o ponto $C(2, 3, 1)$;
- a base do cone tem centro no ponto A e está contida no plano de equação $z=7$;
- B é um ponto da circunferência que limita a base do cone;
- a reta BC tem a direção do vetor $\vec{u}(0, 1, 3)$.

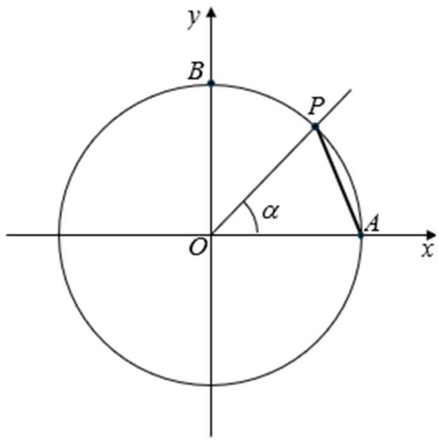
7.1. Justifique que o ponto A tem coordenadas $(2, 3, 7)$.

7.2. Determine as coordenadas do ponto B.

7.3. Seja α o plano que passa no ponto C e é perpendicular à reta BC e seja D o ponto de interseção desse plano com o eixo Oz.

Determine a amplitude do ângulo ACD.
Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

8. Na figura está representada, num referencial o. n. Oxy, a circunferência de centro na origem e raio 1.



Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respetivamente;
- o ponto P se desloca sobre o arco AB.

Para cada posição do ponto P, seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Qual das seguintes expressões dá o comprimento do segmento de reta $[AP]$, em função de α?

(A) $2\sqrt{1-\cos\alpha}$ **(B)** $\sqrt{2-2\cos\alpha}$

(C) $\sqrt{1-\cos\alpha+\sin\alpha}$ **(D)** $\sqrt{2+2\sin\alpha}$

9. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

9.1. Estude o gráfico da função g quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

9.2. Estude a função g quanto ao sentido da concavidade do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

9.3. O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-1}{x}$ é:

(A) $+\infty$ **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1

10. Qual das expressões seguintes é o termo geral de uma progressão aritmética decrescente?

(A) $a_n = 3^{-2n}$ **(B)** $b_n = 3^{\frac{n}{2}}$

(C) $c_n = \log_2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ **(D)** $d_n = \log_2 3^n$

FIM

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.	1.2.	2.	3.	4.1	4.2.	5.	6.	7.1.	7.2.	7.3.	8.	9.1	9.2.	9.3.	10	Total
10	16	16	10	16	16	10	12	10	10	16	10	12	16	10	10	200

Formulário

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

COMPLEXOS

$\left(\rho \, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} \, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Proposta de resolução

1. $P(A)=0,4$, $P(B)=0,6$ e $P(A\cup B)=0,8$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$0,8=0,4+0,6-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=1-0,8\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2$

1.1. $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,6}=\dfrac{1}{3}$

Resposta: (B)

1.2. $P\left(\overline{A\cap B}\,|\,A\right)=\dfrac{P\left(\overline{A\cap B}\cap A\right)}{P(A)}$

$\overline{A\cap B}\cap A=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap A=$

$=\left(\overline{A}\cap A\right)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)=$

$=\varnothing\cup\left(\overline{B}\cap A\right)=A\cap\overline{B}$

$P\left(\overline{A\cap B}\,|\,A\right)=\dfrac{P\left(\overline{A\cap B}\cap A\right)}{P(A)}=$

$=\dfrac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P(A)}=\dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)}=$

$=\dfrac{0,4-0,2}{0,4}=\dfrac{0,2}{0,4}=\dfrac{1}{2}$

2. Sejam os acontecimentos:

E: “O aluno selecionado é estrangeiro”

I: “O aluno selecionado tem 10 ou mais anos de idade”

É dado que:

$P(E)=20\%=0,2$

$P(I\,|\,E)=15\%=0,15$

$P\left(I\,|\,\overline{E}\right)=5\%=0,05$

	I	$\overline{I}$	
E	0,03		**0,2**
$\overline{E}$	0,04		
	0,07		**1**

Pretende-se determinar $P(E \cup I)$:

$$P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I)$$

$$P(I \mid E) = 0{,}15 \Leftrightarrow \frac{P(I \cap E)}{P(E)} = 0{,}15$$

$$P(I \cap E) = P(E) \times 0{,}15 = 0{,}2 \times 0{,}15 = 0{,}03$$

$$P(I \mid \overline{E}) = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{P(I \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = 0{,}05$$

$$P(I \cap \overline{E}) = P(\overline{E}) \times 0{,}05 = (1 - 0{,}2) \times 0{,}05 = 0{,}04$$

$$P(I) = P(I \cap E) + P(I \cap \overline{E}) = 0{,}03 + 0{,}04 = 0{,}07$$

$$P(E \cup I) = P(E) + P(I) - P(E \cap I) = 0{,}2 + 0{,}07 - 0{,}03 = 0{,}24$$

3. Trata-se da linha de ordem 20, formada pelos 21 elementos da forma ${}^{20}C_k \quad (k = 0, 1, \ldots, 20)$

Os primeiros elementos da linha são ${}^{20}C_0 = 1$, ${}^{20}C_1 = 20$, ${}^{20}C_2 = 190$, ${}^{20}C_3 = 1140$, …

$$1 \quad 20 \quad 190 \quad \underbrace{1140 \ \ldots\ 1140}_{\text{15 elementos}} \quad 190 \quad 20 \quad 1$$

Nesta linha há 6 elementos inferiores a 1000 e 15 superiores a 1000.

O acontecimento contrário de "pelo menos um dos elementos é maior do que 1000" é o acontecimento "os dois elementos escolhidos são inferiores a 1000".

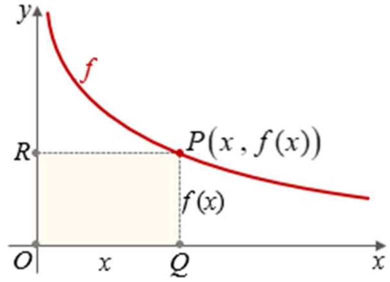
Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = 1 - \frac{{}^{6}C_2}{{}^{21}C_2} = 1 - \frac{15}{210} = \frac{13}{14}$$

Resposta: (C)

4. $f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$, $D_f = \mathbb{R}^+$

4.1. Seja $A(x)$ a área do retângulo $[OQPR]$.



$$A(x) = \overline{OQ} \times \overline{QP}$$

$$A(x) = x \times f(x)$$

$$A(x) = x\left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A'(x)=\left[2x-x\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=(2x)'-\left[x\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=$$

$$=2-\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\frac{x}{2}}\right]=2-\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=$$

$$=2-\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+x\times\frac{2}{2x}\right]=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-1=1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$A'(x)=0\Leftrightarrow 1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\mathrm{e}\Leftrightarrow x=2\mathrm{e}$$

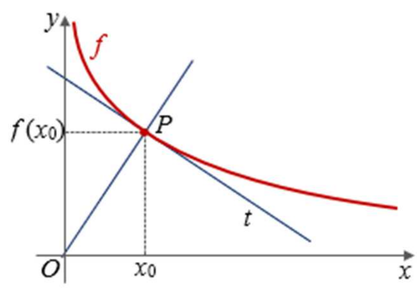
x	0		$2\mathrm{e}$	$+\infty$
A'		$+$	0	$-$
A		$\nearrow$		$\searrow$

A área do retângulo é máxima para $x=2\mathrm{e}$.

$$f(2\mathrm{e})=2-\ln\left(\frac{2\mathrm{e}}{2}\right)=2-\ln(\mathrm{e})=2-1=1$$

$A(2\mathrm{e}\,,\,1)$

4.2. $f'(x)=\left[2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=0-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}}=-\frac{1}{x}$



Seja x_0 a abcissa do ponto P.

Declive da reta $t=m_t=f'(x_0)=-\frac{1}{x_0}$

Dado que $P(x_0\,,\,f(x_0))$ e $O(0\,,0)$ vem:

Declive da reta $OP=m_{OP}=\frac{f(x_0)}{x_0}$

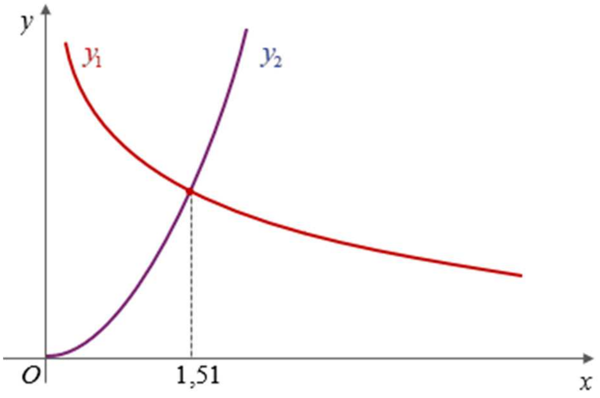
Se a reta t é perpendicular à reta OP, então:

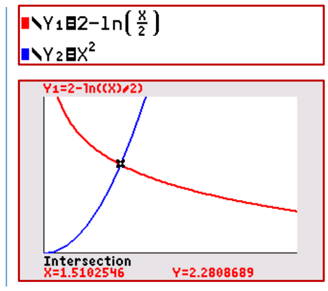
$$m_{OP}=-\frac{1}{m_t}\Leftrightarrow\frac{f(x_0)}{x_0}=x_0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0^2$$

$$-\frac{1}{m_t}=-\frac{1}{-\frac{1}{x_0}}=x_0$$

Logo, a abcissa do ponto P é a solução da equação $f(x)=x^2$, no intervalo $]0,5[$.

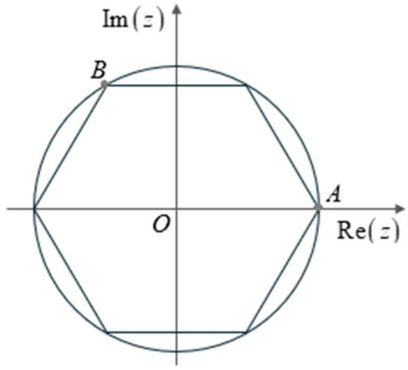
Recorrendo à calculadora gráfica, com $y_1 = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ e $y_2 = x^2$, determinou-se, no intervalo referido, a abcissa do ponto de interseção dos gráficos de y_1 e y_2:





A abcissa do ponto P é aproximadamente igual a 1,51.

5. $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$



$$A\hat{O}B = 2 \times \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Se B é o afixo de z então $|z| = 1$ e $\frac{2\pi}{3}$ é um argumento de z.

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\overline{z} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$-z^4 = -\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^4 = -\left(e^{i\frac{8\pi}{3}}\right) = e^{i\left(\frac{8\pi}{3} - \pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \neq \overline{z}$$

$$z^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i\times 0} \neq \overline{z}$$

$$z^2 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{z}$$

Resposta: (C)

6. $$\frac{i - \sqrt{3}}{w^2} = 2i$$

Sejam $u = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i \quad w = \rho e^{i\theta}$

$$|u| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

Seja α um argumento de u

$$\begin{cases} \tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \alpha \in 2.^{\text{o}}Q \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}; \qquad u = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{i-\sqrt{3}}{w^2}=2i \Leftrightarrow \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}=2e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\rho^2 e^{i\times 2\theta}}=2e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\rho^2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-2\theta\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\rho^2}=2 \wedge \frac{5\pi}{6}-2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2=1 \wedge 2\theta=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\overset{\rho>0}{\Leftrightarrow} \rho=1 \wedge 2\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\right.$$

$$\Leftrightarrow \rho=1 \wedge \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi\,,\,k\in\mathbb{Z}$$

$$k=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$k=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7\pi}{6}$$

Como w pertence ao terceiro quadrante,

$$w=e^{i\frac{7\pi}{6}}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

7. $C(2,3,1)$; $\vec{u}(0,1,3)$

7.1. Dado que o cone é reto e o plano da base, de equação $z=7$, é paralelo ao plano xOy, o eixo do cone, $[CA]$, é paralelo ao eixo Oz. Assim, o ponto A, centro da base, tem cota 7 e abcissa e ordenada iguais às do ponto C. Logo, o ponto A tem coordenadas $(2,3,7)$.

7.2. B é a interseção da reta BC com o plano de equação $z=7$.

$BC:(x,y,z)=(2,3,1)+k(0,1,3),\,k\in\mathbb{R}$

Um ponto da reta BC é da forma $(2,3+k,1+3k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Este ponto pertence ao plano de equação $z=7$ se

$1+3k=7 \Leftrightarrow 3k=6 \Leftrightarrow k=2$

Para $k=2$, $(2,3+k,1+3k)=(2,5,7)$.

Logo, o ponto B tem coordenadas $(2,5,7)$.

7.3. O plano α passa no ponto $C(2,3,1)$ e é perpendicular à reta BC. Logo, é perpendicular ao vetor $\vec{u}(0,1,3)$:

$\alpha: 0(x-2)+1(y-3)+3(z-1)=0 \Leftrightarrow y-3+3z-3=0 \Leftrightarrow y+3z=6$

$y+3z=6 \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0+3z=6 \wedge x=0 \wedge y=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0 \wedge z=2$

Portanto, $D(0,0,2)$.

O ângulo ACD é o ângulo dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CD}$:

$\overrightarrow{CA}=A-C=(2,3,7)-(2,3,1)=(0,0,6)$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(0,0,2)-(2,3,1)=(-2,-3,1)$

$\|\overrightarrow{CA}\|=\|(0,0,6)\|=6$

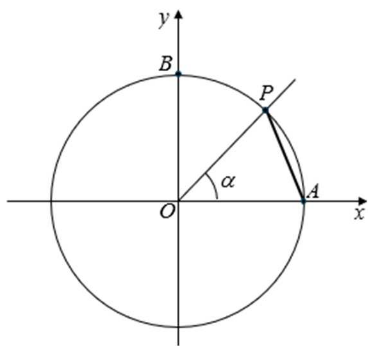
$\|\overrightarrow{CD}\|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=(0,0,6)\cdot(-2,-3,1)=6$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA}\hat{,}\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{6}{6\times\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

Logo, $A\hat{C}D=\left(\overrightarrow{CA}\hat{,}\overrightarrow{CD}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\approx 74{,}5°$

8. $A(1,0)$ e, dado que $\overline{OP}=1$, tem-se $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.



$\overline{AP}=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+(0-\sin\alpha)^2}=$

$=\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$

$=\sqrt{1-2\cos\alpha+1}=\sqrt{2-2\cos\alpha}$

Resposta: (B)

9. $g(x)=(x^2+1)e^{-x}$

9.1. Dado que g é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assintotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x^2+1)e^{-x}\right]=+\infty\times(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2+1)e^{-x}\right]\overset{(+\infty\times 0)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{e^x}{x^2}}=\frac{1+0}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é a única assíntota do gráfico de g, paralela aos eixos coordenados.

9.2. $g'(x)=(x^2+1)'\,e^{-x}+(x^2+1)(e^{-x})'=$

$=2x\,e^{-x}-(x^2+1)e^{-x}=$

$=(2x-x^2-1)e^{-x}=(-x^2+2x-1)e^{-x}$

$g''(x)=(-x^2+2x-1)'\,e^{-x}+(-x^2+2x-1)(e^{-x})'=$

$=(-2x+2)e^{-x}-(-x^2+2x-1)e^{-x}=$

$=(-2x+2+x^2-2x+1)e^{-x}=(x^2-4x+3)e^{-x}$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow (x^2-4x+3)e^{-x}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=3$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
g''	+	0	–	0	+
g	$\cup$		$\cap$		$\cup$
		P.I.		P.I.	

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]3, +\infty[$ e voltada para baixo em $]1, 3[$. Os pontos de abcissas 1 e 3 são pontos de inflexão do gráfico de g .

9.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=-1$

$\left| \begin{array}{l} g(0)=(0+1)e^0=1 \\ g'(0)=(-0^2+2\times 0-1)e^{-0}=-1 \end{array} \right.$

Resposta: (B)

10. $a_n=3^{-2n}$ e $b_n=3^{\frac{n}{2}}$ não definem progressões aritméticas.

$c_n=\log_2\left(\frac{1}{3}\right)^n=n\log_2\left(\frac{1}{3}\right)=n\log_2 3^{-1}=-n\log_2 3$

$c_{n+1}-c_n=-(n+1)\log_2 3+n\log_2 3=$

$c_{n+1}-c_n=-n\log_2 3-\log_2 3+n\log_2 3=-\log_2 3$

(c_n) é uma progressão aritmética de razão $-\log_2 3<0$. Logo, (c_n) é uma progressão aritmética decrescente.

Resposta: (C)