# Proposta de teste de avaliação

## Matemática A

**12.º ANO DE ESCOLARIDADE**

---

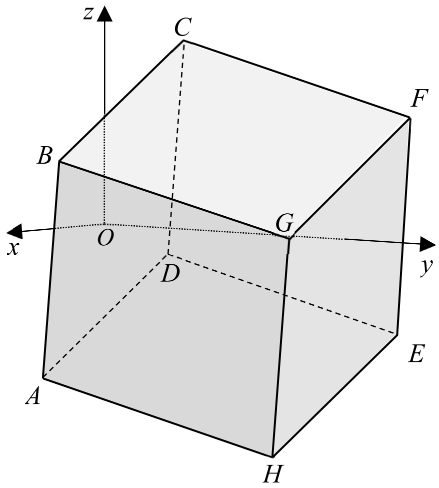
**Duração:** 150 minutos **| Data:**

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$.




Sabe-se que:

- o ponto $A$ tem coordenadas $(3,1,-4)$;
- $[BGFC]$ é a face do cubo contida no plano $\beta: 2x+3y+6z=34$.

**1.1.** Escreva uma equação vetorial da reta $AB$.

**1.2.** Determine as coordenadas do ponto $B$.

**2.** A acidez de uma substância é medida pelo valor do seu pH, que é dado pala fórmula: $pH=-\log\left[H^{+}\right]$ onde $H^{+}$ representa a concentração de iões de hidrogénio, medida em moles por litro.

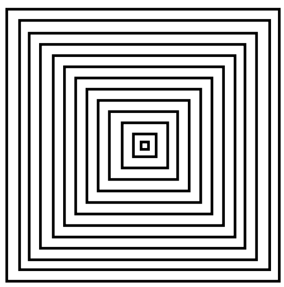
Se o $pH$ do sangue for 7,4 então, o valor mais próximo da concentração de iões (em mol/L) é:

**(A)** $3{,}98\times10^{-8}$ **(B)** $6{,}11\times10^{-4}$ **(C)** $2{,}5\times10^{7}$ **(D)** $1{,}6\times10^{3}$

**3.** Sendo $a=2\log_3 k$ e $b=\log_3 k$, $k\in\mathbb{R}$, então $9^a\times3^{-b}$ é igual a:

**(A)** $b$ **(B)** $a$ **(C)** $k$ **(D)** $k^3$

**4.** Considere os quadrados representados na figura. Cada quadrado a partir do segundo tem menos 2 milímetros de lado que o quadrado anterior. O maior quadrado tem 10 cm de lado.



**4.1.** Determine o comprimento do lado do oitavo quadrado.

**4.2.** Qual é o valor da soma dos perímetros dos 20 primeiros quadrados?

**5.** Considere a função $f$, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(x-\pi)+1}{x} & \text{se } x<0\\[2mm] \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0\end{cases}$$

**5.1.** Determine as assintotas ao gráfico de $f$, paralelas aos eixos coordenados.

**5.2.** Resolva, no intervalo $[-2\pi,0[$, a equação $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3}\sin x}{x}$.

**5.3.** Resolva, em $\mathbb{R}^+$, a condição $x\,f(x)=\ln^2(x+1)$.

**6.** Seja $g$ a função de domínio $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ definida por $g(x)=\sin^3(2x)$.

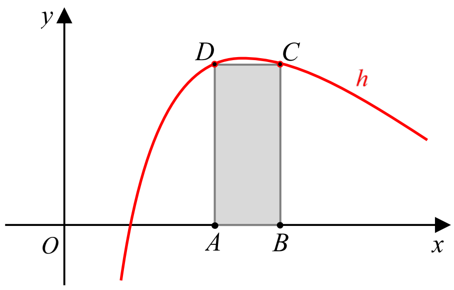
Mostre que $g'(x)=3\sin(2x)\sin(4x)$ e em seguida estude a função $g$ quanto á monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

**7.** Considere a função $h$ definida em $\mathbb{R}^+$ por $h(x)=\ln x^2-\ln^2 x$.

**7.1.** Mostre que: $\exists x\in\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right[:4h(x)=x$

**7.2.** Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de $h$ no ponto de abcissa 1.

**7.3.** Na figura está representada, num referencial $xOy$, parte do gráfico da função $h$ bem como o retângulo $[ABCD]$.




Sabe-se que:

- os pontos $A$ e $B$ pertencem ao eixo $Ox$;
- os pontos $C$ e $D$ pertencem ao gráfico de $h$
- $\overline{AB}=1$

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto $A$ que se sabe pertencer ao intervalo $]0,4[$.

Apresente o valor obtido arredondado às centésimas.

Na sua resposta deve:

- apresentar a equação que lhe permite resolver o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

**8.** Um saco contém seis bolas, sendo três brancas e três pretas, indistinguíveis ao tato.

**8.1.** A Ana e o Pedro tiram alternadamente e ao acaso uma bola do saco até que saia uma bola branca.

As bolas extraídas não são repostas no saco.

Quem tirar uma bola branca vence e o jogo termina.

Qual é a probabilidade de o vencedor do jogo ser o primeiro a extrair uma bola do saco?

**8.2.** Após o jogo, as seis bolas, que apenas se distinguem pela cor, são colocadas em fila, umas encostadas às outras.

Quantas filas diferentes é possível formar?

**(A)** 720 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 20

**9.** Seja *S*, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam *A* e *B* acontecimentos **equiprováveis** ( $A \subset S$ e $B \subset S$ ).

Sabe-se que:

- $P\left(A \cap B\right) = 0{,}3$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1$

Determine o valor da probabilidade condicionada $P\left(A \mid B\right)$ ?

**10.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_0 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$ e $u = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ .

**10.1.** Sabendo que $z_0$ é uma das raízes quartas de $w$, outra raiz quarta de $w$ é:

**(A)** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$ **(B)** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}$ **(C)** $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}$ **(D)** $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$

**10.2.** Determine o menor valor do número natural $n$ para o qual $\left(u \times z_0\right)^n$ é um número real positivo.

**10.3.** Determine o perímetro do quadrado definido no plano complexo pelos afixos das quatro raízes de $w$.

**11.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = a - a\mathrm{i}$ , com $a \in \mathbb{R}^-$ e $z_2 = \mathrm{i}\, z_1$ .

No plano complexo, o afixo de $z_2$ pertence ao:

**(A)** 1.º Quadrante **(B)** 2.º Quadrante

**(C)** 3.º Quadrante **(D)** 4.º Quadrante

**FIM**

**Cotações:**

| Item | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **1.1.** | **1.2.** | **2.** | **3.** | **4.1** | **4.2.** | **5.1.** | **5.2.** | **5.3.** | **6** | **7.1.** | **7.2.** | **7.3.** | **8.1.** | **8.2.** | **9.** | **10.1.** | **10.2** | **10.3.** | **11.** | **Total** |
| 10 | 11 | 8 | 8 | 10 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 | 11 | 10 | 11 | 11 | 8 | 11 | 8 | 11 | 10 | 8 | 200 |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:** $\alpha r$
($\alpha$ : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ : raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:** $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

($\alpha$ : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$ : raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$

($r$ : raio da base; $g$ : geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$

($r$ : raio)

**Volume de uma pirâmide:** $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\dfrac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ ($r$ : raio)

## PROGRESSÕES

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

## TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

## COMPLEXOS

$\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

**Proposta de resolução**

**1.**

**1.1.** $A(3,1,-4)$

O vetor $\vec{n}_\beta = (2,\ 3,\ 6)$ é perpendicular ao plano $\beta$. Logo, é um vetor diretor da reta $AB$.

Então, $AB:\ (x,y,z)=(3,\ 1,-4)+k(2,\ 3,\ 6)\ ,\ k\in\mathbb{R}$

**1.2.** O ponto $B$ é a interseção da reta $AB$ com o plano $\beta$.

Ponto genérico de $AB$: $R(3+2k,\ 1+3k,\ -4+6k)$

Pretendemos determinar $k$ de forma que $R\in\beta$: $2x+3y+6z=34$

Substituindo $x$, $y$ e $z$ em $2x+3y+6z=34$ pelas coordenadas de $R$, obtemos:

$2(3+2k)+3(1+3k)+6(-4+6k)=34 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6+4k+3+9k-24+36k=34 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 49k=34+15 \Leftrightarrow 49k=49 \Leftrightarrow k=1$

Substituindo $k$ por 1 em $R(3+2k,\ 1+3k,\ -4+6k)$ obtemos $(3+2,1+3,-4+6)$.

Logo, o ponto $B$ tem coordenadas $(5,\ 4,\ 2)$.

**2.** $pH=-\log\left[H^+\right]$

$7,4=-\log\left[H^+\right] \Leftrightarrow \log\left[H^+\right]=-7,4 \Leftrightarrow \left[H^+\right]=10^{-7,4}$

$10^{-7,4}\approx 3,98\times 10^{-8}$

**Resposta: (A)**

**3.** $9^a\times 3^{-b}=9^{2\log_3 k}\times 3^{-\log_3 k}=\left(3^2\right)^{2\log_3 k}\times 3^{-\log_3 k}=$

$=3^{4\log_3 k}\times 3^{-\log_3 k}=3^{4\log_3 k-\log_3 k}=$

$=3^{3\log_3 k}=\left(3^{\log_3 k}\right)^3=k^3$

**Resposta: (D)**

**4.**

**4.1.** A sequência das medidas dos lados dos quadrados é formada pelos termos positivos de uma progressão aritmética $(a_n)$ cujo primeiro termo é $a_1=10$ cm e a razão é $r=-2$ mm, ou seja, $r=-0,2$ cm.

O termo geral é: $a_n=10+(n-1)\times(-0,2) \Leftrightarrow a_n=10-0,2n+0,2 \Leftrightarrow a_n=10,2-0,2n$

O oitavo termo é: $a_8=10,2-0,2\times 8 \Leftrightarrow a_8=8,6$

O lado do oitavo quadrado mede 8,6 cm.

**4.2.** Sequência dos perímetros:

$P_1 = 40 \qquad r = -0,2 \text{ cm} \times 4 = -0,8 \text{ cm}$

$P_n = 40 + (n-1)\times(-0,8) \Leftrightarrow P_n = 40,8 - 0,8n$

$P_{20} = 40,8 - 0,8\times 20 = 24,8$

$S_{20} = \dfrac{40+24,8}{2}\times 20 \Leftrightarrow S_{20} = 648$

A soma dos perímetros dos primeiros 20 quadrados é 648 cm.

**5.** $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x-\pi)+1}{x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

**5.1.** $f$ é contínua

Assintotas verticais:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x-\pi)+1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos x+1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1\times\frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1} =$$

$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow e^y - 1 = x$
$x \to 0^+ \Rightarrow y \to 0^+$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{1} = 1$$

Não há assintotas verticais.

Assintotas horizontais:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\frac{\cos(x-\pi)+1}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-\cos x+1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-\cos x}{x}+\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\times\cos x\right) + \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0+0 = 0$$

Nota:

$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x}\times\cos x\right) = 0$ dado que, $-1 \le \cos x \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^-$ e $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y=0$ é uma assíntota do gráfico de $f$ (quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$).

**5.2.** $f(x) = \frac{2-\sqrt{3}\sin x}{x} \Leftrightarrow \frac{\cos(x-\pi)+1}{x} = \frac{2-\sqrt{3}\sin x}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos x + 1}{x} = \frac{2-\sqrt{3}\sin x}{x} \underset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 1-\cos x = 2-\sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \qquad \left| -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \right.$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x+\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\pi + 2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Em $[-2\pi, 0[$ as soluções são: $-\frac{5\pi}{3}$ e $-\pi$.

**5.3.** Em $\mathbb{R}^+$

$$x f(x) = \ln^2(x+1) \Leftrightarrow x \times \frac{\ln(x+1)}{x} = \ln^2(x+1) \underset{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln^2(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1)\left[1-\ln(x+1)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = 0 \vee 1-\ln(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = e^0 \vee \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 1 \vee x+1 = e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = e-1 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = e-1$$

$S = \{e-1\}$

**6.** $g(x) = \sin^3(2x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$g'(x) = 3\sin^2(2x)\left[\sin(2x)\right]' =$$

$$= 3\sin^2(2x) \times 2\cos(2x) =$$

$$= 3\sin(2x) \times 2\sin(2x)\cos(2x) =$$

$$= 3\sin(2x)\sin(4x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow = 3\sin(2x)\sin(4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \vee \sin(4x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \vee 4x = k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} \vee x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, os zeros da derivada são: $0$ e $\frac{\pi}{4}$

Tabela de sinais:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | 0 | + | 0 | – | n.d. |
| $g$ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | n.d. |

$g$ é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$g$ admite um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$ e um máximo relativo igual a 1 para $x = \frac{\pi}{4}$.

**7.** $h(x) = \ln x^2 - \ln^2 x$, $x \in \mathbb{R}^+$

**7.1.** $4h(x) = x \Leftrightarrow 4h(x) - x = 0$

Seja $g$ a função definida por $g(x) = 4h(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 4\ln x^2 - 4\ln^2 x - x$

Pretende-se provar que a função $g$ tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{1}{e}, e\right[$

$g$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ por ser definida pela composta, produto e a diferença de funções contínuas. Logo, $g$ é contínua em $[1, e]$.

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = g\left(e^{-1}\right) = 4 \times \ln\left(e^{-1}\right)^2 - 4 \times \ln^2\left(e^{-1}\right) - \frac{1}{e} =$$

$$= 4 \times 2 \times (-1) - 4 \times (-1)^2 - \frac{1}{e} = -12 - \frac{1}{e} < 0$$

$g(\mathrm{e}) = 4\ln(\mathrm{e})^2 - 4\ln^2 \mathrm{e} - \mathrm{e} = 8\times 1 - 4\times 1^2 - \mathrm{e} = 4 - \mathrm{e} > 0$

$g\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\times g(\mathrm{e}) < 0$

Então, pelo corolário do Teorema de Bolzano é possível afirmar que: $\exists x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right[ : g(x) = 0$,

ou seja, $\exists x \in \left]\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right[ : 4h(x) = x$.

**7.2.** $h(x) = \ln x^2 - \ln^2 x$

$$h'(x) = \left(\ln x^2 - \ln^2 x\right)' = \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} - 2(\ln x)\times\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2x}{x^2} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2 - 2\ln x}{x}$$

$h(1) = \ln 1^2 - \ln^2 1 = 0$; Coordenadas do ponto de tangência: $(1, 0)$

$h'(1) = \frac{2 - 2\ln 1}{1} = \frac{2 - 0}{1} = 2$; Declive: $m = 2$

Equação da reta pedida:

$y - 0 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

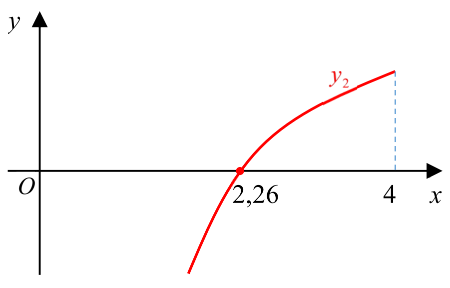
**7.3.** Seja $x_0$ a abcissa de $A$. Então, como $\overline{AB} = 1$, a abcissa de $B$ é $x_0 + 1$.

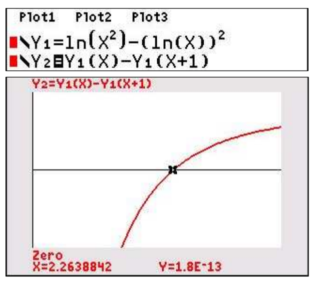
Dado que $[ABCD]$ é um retângulo, vem $\overline{AD} = \overline{BC}$, ou seja $h(x_0) = h(x_0 + 1)$.

Logo, a abcissa de $A$, $x_0$, é a solução da equação $h(x) = h(x+1) \Leftrightarrow h(x) - h(x+1) = 0$

Recorrendo à calculadora gráfica, fazendo $y_1 = \ln x^2 - \ln^2 x$ e $y_2 = y_1(x) - y_2(x+1)$,

determinou-se, no intervalo referido, o zero de $y_2$, tendo-se obtido o seguinte resultado:




Portanto, $x_0 \approx 2,26$.

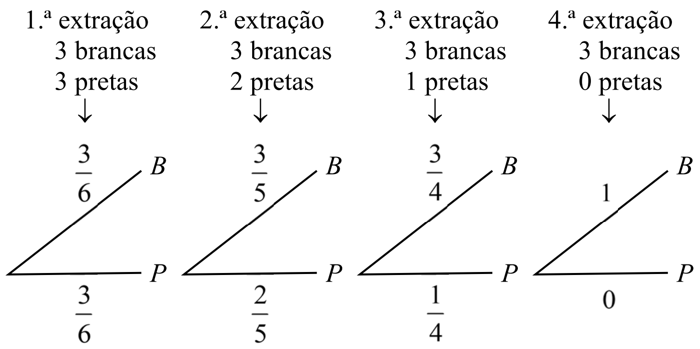
**8.**

**8.1.** No saco estão três bolas brancas e três bolas pretas.

Logo, a bola branca pode sair na 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª extração.

Como o jogo termina quando sair bola branca, este pode terminar após qualquer uma das primeiras quatro extrações

No diagrama em árvore seguinte resumem-se as situações possíveis:




A probabilidade de o vencedor do jogo ser o primeiro a extrair uma bola do saco é a probabilidade de a bola branca sair na 1.ª ou na 3.ª extração:

$P(\text{Branca na 1.ª extração}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad P(B)$

$P(\text{Branca na 3.ª extração}) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$ $\qquad P(PPB)$

$P(\text{ O 1.º a jogar tirar uma bola branca}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} = \frac{10}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$

**8.2.** O número de filas diferentes que é possível formar é o número de maneiras de entre os seis lugares da fila escolher os três lugares para as brancas (os lugares das pretas ficam determinados de forma única). Como as bolas da mesma cor não se distinguem, o número de possibilidades é dado por ${}^6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$.

**Resposta: (D)**

**9.** $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) + P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) + 1 - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 - P(A \cup B) - 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 2 - 0{,}3 - 1 \Leftrightarrow$ $\qquad |P(A \cap B) = 0{,}3$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 \Leftrightarrow P(B) + P(B) - 0{,}3 = 0{,}7 \Leftrightarrow$ $\qquad |P(A) = P(B)$ e $P(A \cap B) = 0{,}3$

$\Leftrightarrow 2P(B) = 1 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}5$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{3}{5}$$

**10.** $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ e $u = 1 + \sqrt{3}\,i$

**10.1.** Se $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$ é uma das raízes quartas de $w$, as quatro raízes são dadas por

$$z_n = 2e^{-i\frac{\pi}{5}} \times 2e^{i\frac{2k\pi}{4}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, \; k = 0, 1, 2, 3$$

$$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{5}}$$

$$z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{10}}$$

$$z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

**Resposta: (B)**

**10.2.** $u = 1 + \sqrt{3}\,i$

$$|u| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Seja $\theta$ um argumento de $u$

$$\begin{cases} \tan\theta = \sqrt{3} \\ \theta \in 1.^{\text{o}}Q \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}; \qquad u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(u \times z_0\right)^n = \left[2e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{5}}\right]^n = \left[4e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)}\right]^n = \left[4e^{i\frac{2\pi}{15}}\right]^n = 4^n e^{i\frac{2n\pi}{15}}$$

$4^n e^{i\frac{2n\pi}{15}}$ é um número real positivo se $\frac{2n\pi}{15} = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2n\pi}{15} = 2k\pi \Leftrightarrow 2n\pi = 30k\pi \Leftrightarrow n = 15k \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o menor valor natural de $n$ obtém-se para $k = 1$ sendo $n = 15$.

**10.3.** Os afixos das quatro raízes de $w$ são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 2.

Assim sendo, a diagonal do quadrado tem diagonal 4.

$$x^2 + x^2 = 16 \Leftrightarrow 2x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 8$$

Como $x > 0$, vem $x = \sqrt{8} \Leftrightarrow x = \sqrt{4 \times 2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$

Perímetro do quadrado: $P = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

**11.** $z_2 = i\,z_1 = i\left(a - a\,i\right) = a\,i - a\,i^2 = a\,i - a \times (-1) = a + a\,i$

Como $a < 0$, o ponto de coordenadas $(a, a)$ pertence ao 3.º quadrante,

**Resposta: (C)**