TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

e:

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap \bar{B})$

pelo que:

$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$

Assim:

$0{,}55 = 0{,}15 + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0{,}55 - 0{,}15 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Como $P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$, então $P(B) = 2P(A \cap B)$.

Logo:

$$0{,}4 = 2\,P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{0{,}4}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$$

Assim:

$P(A) = 0{,}2 + 0{,}15 \Leftrightarrow P(A) = 0{,}35$

2. Opção (D)

$$\begin{aligned}\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n + \ln 2}{n}\right)^{2n} &= \lim\left(1 + \frac{\ln 2}{n}\right)^{2n} = \\ &= \lim\left(\left(1 + \tfrac{\ln 2}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \\ &= \left(\lim\left(1 + \tfrac{\ln 2}{n}\right)^{n}\right)^{2} = \\ &= \left(e^{\ln 2}\right)^{2} = \\ &= 2^2 = \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \ln(e^{-x+5}) = \ln(e^{-4+5}) = \ln e = 1$$

3.

3.1 $$\begin{aligned}\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 3x + 5}{4 - x^2} &= \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 1 - 3x + 6}{(x-2)(-x-2)} = \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 1}{(x-2)(-x-2)} + \lim_{x \to 2^+} \frac{-3x + 6}{(x-2)(-x-2)} = \\ &= \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} \times \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{-x-2} + \lim_{x \to 2^+} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(-x-2)} =\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \times \frac{1}{-4} + \lim_{x \to 2^+} \frac{-3}{-x-2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{x \to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} + \frac{3}{4} =$$

Considerando a mudança de variável $y = x - 2$; $x \to 2^+ \Rightarrow y \to 0^+$:

$$= -\frac{1}{4} \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} + \frac{3}{4} =$$

$$= -\frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

3.2 $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - x(e^{2x}-5)}{x} =$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{x(e^{2x}-5)}{x} =$$

$$= 0 - \lim_{x \to -\infty} (e^{2x} - 5) =$$

$$= -(e^{-\infty} - 5) =$$

$$= -(0 - 5) =$$

$$= 5$$

$b = \lim_{x \to -\infty} (g(x) - 5x) = \lim_{x \to -\infty} (2 - x(e^{2x} - 5) - 5x) =$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2 - x\,e^{2x} + 5x - 5x) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (2 - x\,e^{2x}) =$$

Considerando a mudança de variável $y = -2x \Leftrightarrow -\frac{y}{2} = x$; $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$:

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(2 + \frac{y}{2} e^{-y}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2 \times \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \left(\frac{e^y}{y}\right)}_{\text{limite notável}}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2 \times (+\infty)} =$$

$$= 2 + 0 =$$

$$= 2$$

A reta de equação $y = 5x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

3.3 $g(0) = 2 - 0 \times (e^{2\times 0} - 5) = 2 - 0 = 2$

$f(x) \leq g(0) \Leftrightarrow 2^{2x+1} + 4^{-x+\frac{1}{2}} - 3 \leq 2$

$\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} + (2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 5 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} + 2^{-2x+1} - 5 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} + 2 \times 2^{-2x} - 5 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} + \frac{2}{2^{2x}} - 5 \leq 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{2^{2x}>0, \\ \forall x \in \mathbb{R}}} \ 2 \times (2^{2x})^2 - 5 \times 2^{2x} + 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} \geq \frac{1}{2} \wedge 2^{2x} \leq 2$

$\Leftrightarrow 2x \geq -1 \ \wedge 2x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \leq \frac{1}{2}$

C.S. = $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

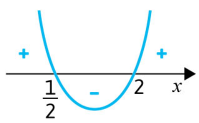
Cálculos auxiliares

- Seja $y = 2^{2x}$:

$2y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\times 2\times 2}}{2\times 2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{5 \pm 3}{4}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = 2$



- $2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} \wedge y \leq 2$

4. Opção (B)

f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $x = 1$, pelo que $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = k$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-x^2 + 6x - 5}{\operatorname{sen}(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(-x+5)}{\operatorname{sen}(x-1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} (-x+5) \times \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(x-1)} =$

$= 4 \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} =$

Considerando a mudança de variável $y = x - 1$; $x \to 1^+ \Rightarrow y \to 0^+$:

$= 4 \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}}} =$

$= 4 \times \frac{1}{1} =$

$= 4$

Desta forma, conclui-se que $k = 4$.

Cálculo auxiliar

	-1	6	-5
1		-1	5
	-1	5	0

$-x^2 + 6x - 5 = (x-1)(-x+5)$

5. $\log_9(x+5) - \log_3 \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_3(x+5)}{\log_3 9} - \log_3 \sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x+5)}{2} - \log_3 \sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5) - 2\log_3 \sqrt{x} = 4$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5) - \log_3 x = 4$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5) = 4 + \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5) = \log_3 3^4 + \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3(x+5) = \log_3(81x)$

$\Leftrightarrow x + 5 = 81x \wedge x + 5 > 0 \wedge 81x > 0$

$\Leftrightarrow 80x = 5 \wedge x > -5 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{80} \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \wedge x > 0$

C.S. = $\left\{\frac{1}{16}\right\}$

6. $f'(x) = \left(-6xe^{4-x^2}\right)' = (-6x)' \times e^{4-x^2} + (-6x) \times \left(e^{4-x^2}\right)' =$

$= -6 \times e^{4-x^2} + (-6x) \times (4-x^2)' \times e^{4-x^2} =$

$= -6 \times e^{4-x^2} + (-6x) \times (-2x) \times e^{4-x^2} =$

$= -6 \times e^{4-x^2} + 12x^2 \times e^{4-x^2} =$

$= e^{4-x^2} \times (12x^2 - 6)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{4-x^2} \times (12x^2 - 6) = 0$

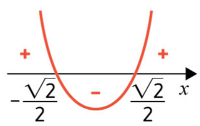
$\Leftrightarrow \underbrace{e^{4-x^2} = 0}_{\text{equação impossível em } \mathbb{R}} \vee 12x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 12x^2 = 6$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{4-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$12x^2 - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$



f é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

f é estritamente decrescente em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f apresenta máximo relativo em $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e mínimo relativo em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Opção (B)

As coordenadas do ponto A, em função de β, são $(2\cos\beta, 2\,\mathrm{sen}\,\beta)$, $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, de onde se conclui que $\overline{AD} = -2\cos\beta$.

$[BD]$ é um diâmetro da circunferência, logo $\overline{AB} = -2\cos\beta$.

$\overline{OC} = 2 \times (-2\cos\beta) = -4\cos\beta$

$\overline{BC} = 2\,\mathrm{sen}\,\beta$

Assim, a área do trapézio $[OABC]$ pode ser dada, em função de β, pela expressão:

$$A(\beta) = \frac{-4\cos\beta + (-2\cos\beta)}{2} \times 2\,\mathrm{sen}\,\beta =$$
$$= -6\cos\beta \times \mathrm{sen}\,\beta =$$
$$= -3 \times 2\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta =$$
$$= -3\,\mathrm{sen}(2\beta) =$$
$$= 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)$$

8.

8.1 $w = \frac{z_1 \times (z_2)^2}{\overline{z_3}} = \frac{(2-i^{19}) \times (1-i)^2}{1+2i} = \frac{(2-i^{4\times4+3}) \times (1-2i+i^2)}{1+2i} =$

$$= \frac{(2-i^3) \times (1-2i-1)}{1+2i} =$$
$$= \frac{(2+i) \times (-2i)}{1+2i} = \frac{-4i-2i^2}{1+2i} =$$
$$= \frac{2-4i}{1+2i} = \frac{(2-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$
$$= \frac{2-4i-4i+8i^2}{1^2+(-2)^2} = \frac{2-8i-8}{1+4} =$$
$$= \frac{-6-8i}{5} = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$$

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{64}{25}} =$$
$$= \sqrt{\frac{100}{25}} =$$
$$= \sqrt{4} = 2$$

Seja $\theta = \mathrm{Arg}(w)$; $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$, pois a parte real e a parte imaginária de w são ambas negativas.

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-\frac{8}{5}}{-\frac{6}{5}} = \frac{4}{3}$

Uma vez que a função tangente é contínua e estritamente crescente em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ e que $\mathrm{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, como $\frac{4}{3} > 1$, podemos garantir que $-\frac{3\pi}{4} < \theta < -\frac{\pi}{2}$.

8.2 $-z_2 \times z = -(1 - i) \times e^{i(2\theta)} =$

$= (-1 + i) \times e^{i(2\theta)} =$

$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \times e^{i(2\theta)} =$

$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+2\theta\right)}$

$-z_2 \times z$ é um número imaginário puro se

$\frac{3\pi}{4} + 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma:

$\frac{3\pi}{4} + 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, logo, para $k = 1$, tem-se que $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

Assim, o valor de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para o qual $-z_2 \times z$ é um número imaginário puro é $\frac{3\pi}{8}$.

Cálculos auxiliares

- $|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja β um argumento de $-1 + i$:

$\left.\begin{array}{l} \text{tg}(\beta) = \frac{1}{-1} = -1 \\ \text{Re}(w) < 0 \ \wedge \ \text{Im}(w) > 0 \end{array}\right\}$ β é um ângulo pertencente ao 2.º quadrante

$\beta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

9. Opção (C)

$z = -4i = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$z \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} =$

$= 4 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} =$

$= 4 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} =$

$= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= \frac{4}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{2}i =$

$= 2 - 2\sqrt{3}i$

10. Comecemos por escrever $\sqrt{3} - i$ na forma trigonométrica:

$|\sqrt{3} - i| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

Seja θ um argumento de $\sqrt{3} - i$:

$\left.\begin{array}{l} \text{tg}(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{Re}(w) > 0 \ \wedge \ \text{Im}(w) < 0 \end{array}\right\}$ θ é um ângulo pertencente ao $4.$º quadrante.

$\theta = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

$$w = \frac{\sqrt{3}-i}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{4\pi}{6}\right)} =$$

$$= 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Sabemos que w é uma das raízes quintas de um certo número complexo z, logo $z = w^5$, de onde resulta que:

$$z = \left(2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^5 = 2^5 e^{i\left(5\times\frac{2\pi}{3}\right)} = 32e^{i\left(\frac{10\pi}{3}\right)} = 32e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$32e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = 32\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 32\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 32\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$

$$= -\frac{32}{2} - \frac{32\sqrt{3}}{2}i =$$

$$= -16 - 16\sqrt{3}i$$

$$z = -16 - 16\sqrt{3}i$$