TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1. Nas condições descritas, como o Primeiro-Ministro ocupa sempre o lugar central da primeira fila, existe uma única alternativa para ele se posicionar. Assim, existem ${}^{17}A_6$ formas distintas de serem escolhidos ordenadamente 6 elementos de entre os 17 ministros, com exceção do Primeiro-Ministro, para se disporem na primeira fila das escadas. Para cada uma destas formas, existem ${}^{11}A_6$ maneiras diferentes de serem selecionados e ordenados 6 elementos, de entre os 11 elementos remanescentes, que ocuparem a segunda fila e, por cada uma destas, existem $5!$ modos distintos de os restantes ministros se posicionarem na terceira fila das escadas.

Desta forma, uma expressão que permite determinar o número de formas distintas que, nas condições enunciadas, os 18 elementos do governo se poderiam ter disposto para a fotografia é:

${}^{17}A_6 \times {}^{11}A_6 \times 5!$

2. Opção (C)

$$\lim\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n} = \lim\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{3n}\right)^{3n} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e}$$

3. A proposição **I** é falsa, pois, sendo $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-6x)=0$, conclui-se que a reta de equação $y=6x$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $-\infty$, e, uma vez que f é par, podemos garantir que a reta de equação $y=-6x$ é assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.

A proposição **II** é falsa, pois, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$, pelo que $f'(3)=2$, o que significa que 2 é o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x=3$. Logo, a reta de equação $y=2$ não pode ser a reta tangente ao gráfico de f em $x=3$ pois tem declive nulo.

A proposição **III** é falsa, uma vez que, sendo f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, f é contínua em $\mathbb{R}$, o que impossibilita a existência de assíntotas verticais ao gráfico de f.

4. Opção (A)

$\log_a(a\times b)=8 \Leftrightarrow \log_a a+\log_a b=8 \Leftrightarrow 1+\log_a b=8 \Leftrightarrow \log_a b=7$

$$\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^3b}}\right) = \log_a(1)-\log_a\sqrt[5]{a^3b} = 0-\log_a\sqrt[5]{a^3b} =$$

$$= -\log_a\left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{1}{5}}\right) = -\left(\log_a a^{\frac{3}{5}}+\log_a b^{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= -\log_a a^{\frac{3}{5}}-\log_a b^{\frac{1}{5}} = -\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\log_a b =$$

$$= -\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\times 7 = -\frac{3}{5}-\frac{7}{5} = -\frac{10}{5} = -2$$

5.

5.1 Para que f seja contínua em $x=1$, é necessário que $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4-4x}{xe^x-e}$

Considerando a mudança de variável $y=x-1 \Leftrightarrow y+1=x$; $x\to 1^- \Rightarrow y\to 0^-$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4(1-x)}{xe^x-e}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-4y}{(y+1)e^{y+1}-e}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-4y}{ye^{y+1}+e^{y+1}-e}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^-}\frac{-4y}{ye^{y+1}+e(e^y-1)}=$$

$$=\frac{-4}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ye^{y+1}+e(e^y-1)}{y}}=$$

$$=\frac{-4}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{ye^{y+1}}{y}+e\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$

$$=\frac{-4}{\lim\limits_{x\to 0^-}e^{y+1}+e\times 1}=$$

$$=\frac{-4}{e+e}=\frac{-4}{2e}=-2e^{-1}$$

$f(1)=2\times 1^2\times e^{-1}=2e^{-1}$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq f(1)$, f não é contínua em $x=1$.

5.2 $x\in]1,+\infty[$:

$$f'(x)=(2x^2e^{-x})'=(2x^2)'e^{-x}+2x^2(e^{-x})'=4xe^{-x}-2x^2e^{-x}=e^{-x}(4x-2x^2)$$

$$f''(x)=\left(e^{-x}(4x-2x^2)\right)'=$$

$$=(e^{-x})'(4x-2x^2)+e^{-x}(4x-2x^2)'=$$

$$=-e^{-x}(4x-2x^2)+e^{-x}(4-4x)=$$

$$=e^{-x}(-4x+2x^2+4-4x)=$$

$$=e^{-x}(2x^2-8x+4)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(2x^2-8x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}=0}_{\text{equação impossível em }\mathbb{R}} \vee 2x^2-8x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 1\times 2}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2} \vee x=2-\sqrt{2}$$

$x\in]1,+\infty[$, logo $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$

x	1		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
e^{-x}		$+$	$+$	$+$
$2x^2-8x+4$		$-$	0	$+$
Sinal de f''		$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]1, 2+\sqrt{2}\,\right]$ e tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$. Apresenta um ponto de inflexão de abcissa $2+\sqrt{2}$.

6.

6.1 Opção (D)

$f'(x) = (\cos^2(2x) - 2x)' =$

$= (\cos^2(2x))' - (2x)' =$

$= 2\cos(2x)\,(\cos(2x))' - 2 =$

$= -4\cos(2x)\operatorname{sen}(2x) - 2$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - 2 = -4\cos(\pi)\operatorname{sen}(\pi) - 2 = 0 - 2 = -2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - 2\times\frac{\pi}{2} = \cos^2(\pi) - \pi = 1 - \pi$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = \frac{\pi}{2}$ é da forma $y = -2x + b$.

Substituindo na equação da reta x e y, respetivamente, pelas coordenadas do ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, 1-\pi\right)$, obtém-se:

$1 - \pi = -2\times\frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow 1 - \pi = -\pi + b \Leftrightarrow b = 1$

Assim, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = \frac{\pi}{2}$ é $y = -2x + 1$.

6.2 Pretende-se mostrar que, no intervalo $]0, \pi[$, existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico de f que se situa numa circunferência de centro na origem e raio 5, isto é, que a sua distância à origem é igual a 5.

Seja P um ponto pertencente ao gráfico de f. As suas coordenadas são da forma $(x, \cos^2(2x) - 2x)$.

$d_{(O,P)} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (\cos^2(2x) - 2x - 0)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (\cos^2(2x) - 2x)^2} = 5$

Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = \sqrt{x^2 + (\cos^2(2x) - 2x)^2}$.

g é contínua em $[0, \pi]$, por se tratar de operações sucessivas de funções contínuas nesse intervalo.

$g(0) = \sqrt{0^2 + (\cos^2(2\times 0) - 2\times 0)^2} = \sqrt{(\cos^2(0))^2} = 1$

$g(\pi) = \sqrt{\pi^2 + (\cos^2(2\pi) - 2\pi)^2} = \sqrt{\pi^2 + (1 - 2\pi)^2} \approx 6{,}15$

Assim, $g(0) < 5 < g(\pi)$.

Desta forma, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$$\exists c \in]0, \pi[: \sqrt{c^2 + (\cos^2(2c) - 2c)^2} = 5$$

Prova-se assim, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico de f que se situa numa circunferência de centro na origem e raio 5.

7. $\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2^x+2^{-x}-2(2^x-2^{-x})}{2^x-2^{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2^x+2^{-x}-2\times2^x+2\times2^{-x}}{2^x-2^{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2^x+3\times2^{-x}}{2^x-2^{-x}} = 0$

$\Leftrightarrow -2^x + 3 \times 2^{-x} = 0 \ \wedge \ 2^x - 2^{-x} \neq 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{2^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}} \quad -2^{2x} + 3 = 0 \ \wedge \ 2^x \neq 2^{-x}$

$\Leftrightarrow -2^{2x} = -3 \ \wedge \ x \neq -x$

$\Leftrightarrow 2^{2x} = 3 \qquad \wedge \ 2x \neq 0$

$\Leftrightarrow 2x = \log_2 3 \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\log_2 3 \ \wedge \ x \neq 0$

C.S. = $\left\{\frac{1}{2}\log_2 3\right\}$

8. **Opção (B)**

z é um número complexo de argumento $\frac{\pi}{5}$, pelo que z escrito na forma trigonométrica é $|z|e^{i\frac{\pi}{5}}$.

$-i^9 = -i^1 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Assim, $-i^9 z = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times |z|e^{i\frac{\pi}{5}} = |z|e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)} = |z|e^{i\left(\frac{17\pi}{10}\right)}$.

Logo, um argumento de $-i^9 z$ é $\frac{17}{10}$.

9.

9.1 $w = \overline{z_1} + z_1 z_2 - 6(1+i)^2 =$

$= -2 + 3i + 4 + 7i - 6 \times 2i =$

$= 2 - 2i$

$|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Cálculos auxiliares:

$\overline{z_1} = -2 + 3i$

$z_2 = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$

$= \frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{3-3i-i-1}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$

$z_1 z_2 = (-2+3i) \times (1-2i)$

$= -2 + 4i + 3i - 6i^2 =$

$= -2 + 7i + 6 = 4 + 7i$

$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

Seja θ um argumento de w:

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{tg}(\theta) = \frac{-2}{2} = -1 \\ \mathrm{Re}(w) > 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(w) < 0 \end{array}\right\} \theta \text{ é um ângulo pertencente ao 4º quadrante}$$

$\theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Desta forma, $w = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

9.2 $\frac{i^{11}}{z_3^n} = \frac{-i}{\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right)^n} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}{\left(e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right)^n} = \frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(-\frac{n\pi}{5}\right)}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\pi}{5}\right)}$

$e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{n\pi}{5}\right)}$ é um imaginário puro, se $\frac{3\pi}{2} + \frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Desta forma,

$\frac{3\pi}{2} + \frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{5} = -\frac{2\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{5} = -1 + k, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = -5 + 5k, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores inteiros a k:

$k = 0$: $\quad n = -5 + 5 \times 0 = -5 \quad (-5 \notin \mathbb{N})$

$k = 1$: $\quad n = -5 + 5 \times 1 = 0 \quad (0 \notin \mathbb{N})$

$k = 2$: $\quad n = -5 + 5 \times 2 = 5$

$5 \in \mathbb{N}$, logo 5 é o menor número natural n de modo que $\frac{z_1 + i^{11}}{z_3^n}$ é um imaginário puro.

Cálculos auxiliares:

$i^{11} = i^{2\times 4+3} = i^3 = -i$

$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) =$

$= e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

10. Opção (B)

Como o ponto W pertence ao segundo quadrante e é o afixo de um número complexo w tal que $\mathrm{Im}(w) = -\mathrm{Re}(w)$, conclui-se que w, escrito na forma trigonométrica, é da forma $|w|e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

Assim, $w^2 = \left(|w|e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right)^2 = |w|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

Como $i^5 = i$ e $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, temos que:

$$\frac{w^2}{i^3} = \frac{|w|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = |w|^2 e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} = |w|^2 e^{i(\pi)} = |w|^2 \times (-1) = -|w|^2$$

Desta forma, o afixo do número complexo w pertence ao semieixo real negativo, sendo o ponto B o único ponto que o pode representar.