Teste de Matemática A

2024 / 2025

Teste N.º 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Expoente[12] | Daniela Raposo e Luzia Gomes
Com colaboração de Daniela Breda

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $\quad (k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\,(n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 0{,}55$
- $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}15$
- $P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap B)$

Qual é o valor de $P(A)$?

(A) $0{,}35$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}65$

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(e^{-x+5})$.

Considere a sucessão de números reais (u_n) tal que $u_n = \left(\frac{n+\ln 2}{n}\right)^{2n}$.

Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) e^4 **(B)** e **(C)** 4 **(D)** 1

3. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-2} - 3x + 5}{4 - x^2} & \text{se} \quad x > 2 \\ 2 - x(e^{2x} - 5) & \text{se} \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

3.1 Determine $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$.

3.2 O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

3.3 Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2^{2x+1} + 4^{-x+\frac{1}{2}} - 3$$

Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição $f(x) \leq g(0)$.

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

4. Para um certo número real k, é contínua, em $]-\infty, 4[$, a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{-x^2 + 6x - 5}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se} \quad 1 < x < 4 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** -1 **(D)** -4

5. Sem recorrer à calculadora, resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\log_9(x+5) - \log_3 \sqrt{x} = 2$$

6. Seja f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -6xe^{4-x^2}$.

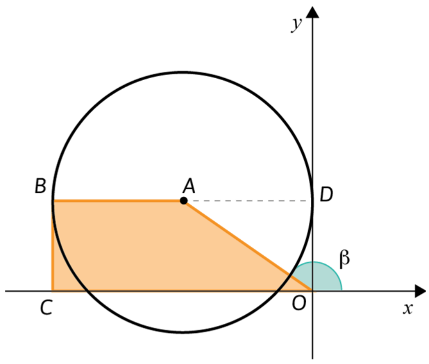
Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, estude a função f quanto a monotonia e a existência de extremos.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função f tem extremos relativos.

7. Na figura estão representados, num referencial ortonormado Oxy, a circunferência de centro no ponto A e um trapézio retângulo $[OABC]$.

Sabe-se que:

- $\overline{OA} = 2$;
- a circunferência é tangente ao eixo Oy no ponto D;
- $[BD]$ é um diâmetro da circunferência;
- C tem abcissa negativa e pertence ao eixo Ox;
- β é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$, $\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



A área do trapézio $[OABC]$ pode ser dada, em função de β, pela expressão:

(A) $3\ \text{sen}(2\beta)$ **(B)** $3\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)$ **(C)** $3\ \text{sen}(\pi - 2\beta)$ **(D)** $3\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\beta\right)$

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 - i^{19}$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 1 - 2i$.

8.1 Seja w o número complexo tal que $w = \frac{z_1 \times (z_2)^2}{\overline{z_3}}$.

Mostre, sem recorrer à calculadora, que:

$$|w| = 2 \quad \text{e} \quad \text{Arg}(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$$

8.2 Sejam $z = e^{i(2\theta)}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ para o qual $-z_2 \times z$ é um número imaginário puro.

9. Considere o ponto A, afixo no plano complexo do número $z = -4i$.

Qual dos seguintes números complexos tem como afixo o transformado do ponto A por uma rotação de centro na origem de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{6}$ radianos?

(A) $2 + 2\sqrt{3}i$ **(B)** $-2 + 2\sqrt{3}i$ **(C)** $2 - 2\sqrt{3}i$ **(D)** $-2 - 2\sqrt{3}i$

10. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = \frac{\sqrt{3}-i}{e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}$.

O número complexo w é uma das raízes quintas de um certo número complexo z.

Determine z na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1**	**8.2**	**9.**	**10.**	**TOTAL**
10	10	18	18	18	10	20	20	10	18	20	10	18	**200**