

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Uma vez que o seleccionador nacional e os seus dois treinadores-adjuntos devem ficar todos separados, existem 5C_3 possibilidades diferentes de ocuparem três posições, de entre as cinco possíveis (_ J _ J _ J _ J _) e, para cada uma destas, existem 3! modos de permutarem entre si. Para cada uma destas formas, existem 4! formas distintas de as quatro jogadoras mais pontuadoras da partida se disporem entre si.

Assim, o número de maneiras distintas de dispor as sete pessoas nas condições pretendidas é ${}^5C_3 \times 3! \times 4!$.

2. As coordenadas do ponto A em função de α são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ e o ponto C tem abcissa 1.

A altura do triângulo $[ABC]$ em função de α é igual a $1 - \cos \alpha$ e a sua altura é igual a $2 \sin \alpha$.

Seja $A(\alpha)$ a função que define a área do triângulo $[ABC]$ em função de α .

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \\ &= \sin \alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \end{aligned}$$

3.

3.1 Opção (C)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2 + x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x(x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = \\ &= f'(0) \times \frac{1}{0+1} = \\ &= f'(0) = \\ &= 2 \cos 0 + \sin(2 \times 0) = \\ &= 2 \times 1 + 0 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$3.2 \quad f''(x) = (2 \cos x + \sin(2x))' = -2 \sin x + 2 \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 \sin x + 2 \cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\sin x + \cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -\sin x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de f''	n.d.	+	0	-	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	U	P.I.	∩	n.d.

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right[$ e concavidade voltada para baixo em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$. Apresenta ponto de inflexão no ponto de abscissa $\frac{\pi}{6}$.

4. Opção (D)

$$D_h = \{x \in \mathbb{R}: e^{2x} - e^x - 2 > 0\} =]\ln 2, +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-\infty, \ln 2]$$

Cálculos auxiliares

Seja $y = e^x$:

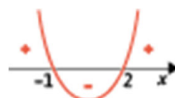
$$\bullet y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

$$\bullet y^2 - y - 2 > 0 \Leftrightarrow y < -1 \vee y > 2$$

$$\bullet e^{2x} - e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x < -1}{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \vee e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$



5.

5.1. Opção (C)

A reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$, pelo que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 1)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x - 1) = 0.$$

5.2. Seja m_r o declive da reta r .

Tem-se que $m_r = f'(1)$.

Determinemos $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln^2 x - 6 \ln x)' = \\ &= 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{6}{x} = \\ &= \frac{2 \ln x}{x} - \frac{6}{x} \end{aligned}$$

Assim:

$$f'(1) = \frac{2 \ln 1}{1} - \frac{6}{1} = 0 - 6 = -6$$

Seja m_s o declive da reta s . Como a reta s é perpendicular à reta r , tem-se que $m_s = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$.

A reta s interseca o eixo Ox no ponto de abscissa 12, pelo que o ponto de coordenadas $(12, 0)$ pertence à reta s . Assim, $0 = \frac{1}{6} \times 12 + b \Leftrightarrow b = -2$, de onde se conclui que a equação reduzida da reta s é $y = \frac{x}{6} - 2$.

$$\begin{aligned} 5.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 11x + 24}{\sin(x-3)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-8)}{\sin(x-3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin(x-3)} \times \lim_{x \rightarrow 3} (x-8) = \\ &= -5 \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin(x-3)} = \\ &= \frac{-5}{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3}} = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	-11	24
3		3	-24
	1	-8	0

$$x^2 - 11x + 24 = (x-3)(x-8)$$

Considerando a mudança de variável $y = x - 3$; $x \rightarrow 3 \Rightarrow y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} &= \frac{-5}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \\ &\quad \text{limite notável} \\ &= \frac{-5}{1} = \\ &= -5 \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que $a = -5$.

$x \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \Leftrightarrow \ln^2 x - 6 \ln x = -5 \\ &\Leftrightarrow \ln^2 x - 6 \ln x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow \ln x = \frac{6 \pm 4}{2} \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \vee \ln x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = e \vee x = e^5 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{e, e^5\}$$

6.

6.1 Para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, é necessário que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\bullet f(1) = \frac{5 \times 1 - 4}{1 - e^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{e-1}{e}} =$$

$$= \frac{e}{e-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{1 - e^{2x-2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-(e^{2x-2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{2(x-1)} - 1} =$$

$$= -2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(e^{x-1} + 1)(e^{x-1} - 1)} =$$

$$= -2 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{x-1} + 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} =$$

$$= -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}} =$$

$$= \frac{-1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1}} =$$

Considerando a mudança de variável $y = x - 1$; $x \rightarrow 1^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-$:

$$= \frac{-1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}} =$$

limite notável

$$= -\frac{1}{1} =$$

$$= -1$$

Como $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, pode concluir-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

6.2 $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5x-4}{1-e^{-x}}}{x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-4}{x(1-e^{-x})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-4}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{x} - \frac{4}{x} \right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{4}{x} \right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = \\
&= (5-0) \times \frac{1}{1-0} = \\
&= 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-4}{1-e^{-x}} - 5x \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x-4}{1-e^{-x}} - \frac{5x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-4-5x+5xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4-5xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 - \frac{5x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-4 - \frac{5x}{e^x} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-e^{-x})} = \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-4) - 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} = \\
&= \frac{-4 - \frac{5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}}{1-e^{-\infty}}}{1-e^{-\infty}} = \\
&= \frac{-4 - \frac{5}{+\infty}}{1-0} = \\
&= \frac{-4-0}{1} = \\
&= -4
\end{aligned}$$

$ \begin{aligned} & * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ & \text{limite notável} \end{aligned} $

Assim, a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f , quando x tende para $+\infty$, é $y = 5x - 4$.

7. Opção (A)

Começemos por determinar a abcissa do ponto A :

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow \log(2x + 10) = 0 \\&\Leftrightarrow 2x + 10 = 1 \wedge 2x + 10 > 0 \\&\Leftrightarrow x = -\frac{9}{2} \wedge x > -5\end{aligned}$$

A abcissa do ponto A é $-\frac{9}{2}$.

Determinemos a ordenada do ponto B :

$$f(0) = \log(2 \times 0 + 10) = \log(10) = 1$$

B tem ordenada 1.

Por fim, determinemos a ordenada do ponto C :

$$g(0) = -2^{0+2} + 8 = -4 + 8 = 4$$

C tem ordenada 4.

Assim, a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\frac{(4-1) \times \frac{9}{2}}{2} = \frac{27}{4}$ u.a.

8. $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}h(x) &= 3 \log_{64}(1 + \sin x) + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= 3 \frac{\log_4(1 + \sin x)}{\log_4 64} + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= 3 \frac{\log_4(1 + \sin x)}{\log_4(4^3)} + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= 3 \frac{\log_4(1 + \sin x)}{3} + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= \log_4(1 + \sin x) + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= \log_4(1 - \sin^2 x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= \log_4(\cos^2 x) + \log_2(4 \sin x) = \\&= \log_4(\cos^2 x) + \frac{\log_4(4 \sin x)}{\log_4 2} = \\&= \log_4(\cos^2 x) + \frac{\log_4(4 \sin x)}{\frac{1}{2}} = \\&= \log_4(\cos^2 x) + 2 \log_4(4 \sin x) = \\&= \log_4(\cos^2 x) + \log_4((4 \sin x)^2) = \\&= \log_4(\cos^2 x) + \log_4(16 \sin^2 x) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log_4(16 \sin^2 x \cos^2 x) = \\
&= \log_4(4 \times 4 \sin^2 x \cos^2 x) = \\
&= \log_4(4 \times (2 \sin x \cos x)^2) = \\
&= \log_4(4 \times (\sin(2x))^2) = \\
&= \log_4 4 + \log_4(\sin(2x)^2) = \\
&= 1 + 2 \log_4(\sin(2x))
\end{aligned}$$

9. Uma equação que permite resolver o problema é $V(2m) = 0,96 V(m)$, $0 \leq m \leq 2$.

Utilizando x como variável independente:

$$\frac{2158}{1-0,24e^{-0,2 \times 2x}} = 0,96 \times \frac{2158}{1-0,24e^{-0,2x}}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$y_1 = \frac{2158}{1-0,24e^{-0,2 \times 2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$y_2 = 0,96 \times \frac{2158}{1-0,24e^{-0,2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Assim, o instante em que, com três casas decimais,

$$V(2m) = 0,96 V(m), \text{ é } 0,912.$$

Desta forma, a amplitude do intervalo é:

$$2 \times 0,912 - 0,912 = 0,912 \text{ minutos.}$$

Tem-se que $0,912 \times 60 \approx 55$, pelo que a amplitude do intervalo é 55 segundos.

