TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

$2! \times 4! \times 9! \times 3! = 104\,509\,440$

2. Opção (A)

$$\lim_{x\to 3}\frac{\text{sen}(3-x)}{-x^2+x+6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\text{sen}(3-x)}{(x-3)(-x-2)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\text{sen}(3-x)}{x-3} \times \lim_{x\to 3}\frac{1}{-x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\text{sen}(3-x)}{x-3} \times \frac{1}{-3-2} =$$

$$= -\frac{1}{5} \times \lim_{x\to 3}\frac{\text{sem}(3-x)}{x-3} =$$

$$= \frac{1}{5} \times \lim_{x\to 3}\frac{\text{sen}(3-x)}{3-x} =$$

Considerando a mudança de variável $y = 3 - x$; $x \to 3 \Rightarrow y \to 0$:

$$= \frac{1}{5} \times \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= \frac{1}{5} \times 1 =$$

$$= \frac{1}{5}$$

Cálculo auxiliar

	-1	1	6
3		-3	-6
	-1	-2	0

$-x^2 + x + 6 = (x-3)(-x-2)$

3. $D_g = \{x \in \mathbb{R}: \cos x \neq 0 \wedge \text{sen}(x) - \text{sen}(2x) \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \left\{x \in \mathbb{R}: x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cálculos auxiliares

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}(x) - \text{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x) - 2\text{sen}(x)\cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x)\big(1 - 2\cos(x)\big) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x) = 0 \vee 1 - 2\cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}(x) = 0 \vee \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4.

4.1 $f(x) = g\left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow e^x + 12e^{-x} - 1 = 6$

$\Leftrightarrow e^x + 12e^{-x} - 7 = 0$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}} (e^x)^2 + 12 - 7e^x = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 7e^x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\times 1 \times 12}}{2\times 1}$

Cálculo auxiliar

$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 - \log_2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 2 - \log_2\frac{1}{16} =$

$= 2 - \log_2 2^{-4} =$

$= 2 - (-4) =$

$= 2 + 4 =$

$= 6$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{7\pm1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 4$

$\Leftrightarrow x = \ln 3 \vee x = \ln 4$

C.S. = $\{\ln 3\,, \ln 4\}$

4.2 $f'(x) = (e^x + 12e^{-x} - 1)' = e^x - 12e^{-x}$

$f'(0) = e^0 - 12e^0 = 1 - 12 = -11$

Desta forma, o declive da reta r é -11.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \log_2 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge x \neq 0$

O ponto A tem abcissa positiva, logo as suas coordenadas são $(2, 0)$.

Uma vez que se pretende a equação reduzida da reta paralela à reta r:

$$y = -11x + b$$

Substituindo na equação da reta x e y, respetivamente, pelas coordenadas do ponto A, obtém-se:

$0 = -11 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 22$

Assim, a equação reduzida da reta paralela à reta r, que passa pelo ponto A, é $y = -11x + 22$.

5. Opção (D)

$\log_b \dfrac{a}{b^2} = 6 \Leftrightarrow \log_b a - \log_b b^2 = 6$

$\Leftrightarrow \log_b a - 2 = 6$

$\Leftrightarrow \log_b a = 8$

$\log_b a = 8 \Leftrightarrow \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} = 8$

$\Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{8}$

$\log_a(b^2) - b^{3\log_b\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\log_a b - b^{\log_b\left(\frac{1}{2}\right)^3} =$

$= 2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$

$= \frac{2}{8} - \frac{1}{8} =$

$= \frac{1}{8}$

6.

6.1 Para que f seja contínua em $x = 2$, é necessário que $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = k$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1-\sqrt{3-x}}{x^2-2x} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(1-\sqrt{3-x}\right)\left(1+\sqrt{3-x}\right)}{(x^2-2x)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{1-(3-x)}{x(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{x(x-2)\left(1+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x\left(1+\sqrt{3-x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\times\left(1+\sqrt{3-2}\right)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}+2x-5}{x^2-4} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}+2x-5}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{(x-2)(x+2)} + \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \times \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} + \lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} \times \frac{1}{2+2} + \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} + \frac{2}{2+2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2}-1}{x-2} + \frac{1}{2} =$$

Considerando a mudança de variável $y = x - 2$; $x \to 2^+ \Rightarrow y \to 0^+$:

$$= \frac{1}{4} \times \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}$$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, não existe nenhum valor real k para o qual a função f seja contínua em $x = 2$.

6.2 Opção (C)

$$(f \circ g)(-2) = f\big(g(-2)\big) = f(2\times(-2)-2) =$$

$$= f(-6) =$$

$$= \frac{1-\sqrt{3-(-6)}}{(-6)^2-2\times(-6)} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{9}}{36+12} =$$

$$= -\frac{2}{48} = -\frac{1}{24}$$

7.

7.1 f é contínua em $]\ln 2, +\infty[$, logo a reta de equação $x = \ln 2$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x \to (\ln 2)^+} (\ln(2e^x - 4) - 5x) = \ln\left(2e^{(\ln 2)^+} - 4\right) - 5(\ln 2)^+ =$$
$$= \ln(4^+ - 4) - 5\ln 2 =$$
$$= \ln(0^+) - 5\ln 2 =$$
$$= -\infty - 5\ln 2 =$$
$$= -\infty$$

A reta de equação $x = \ln 2$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2e^x - 4) - 5x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2e^x - 4)}{x} - \frac{5x}{5}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(2e^x - 4)}{x} - 5\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(2e^x - 4)}{x} - 5 =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)\right)}{x} - 5 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)}{x} - 5 =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)}{x} - 5 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}\right) - 5 =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}\right) - 5 = 1 + \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)}{x}\right) - 5 =$$
$$= \frac{\ln\left(2 - \frac{4}{+\infty}\right)}{+\infty} - 4 =$$
$$= \frac{\ln(2)}{+\infty} - 4 =$$
$$= 0 - 4 =$$
$$= -4$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (-4x)\right) = \lim_{x \to +\infty} (\ln(2e^x - 4) - 5x + 4x) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(e^x\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)\right) - x\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^x) + \ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right) - x\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x + \ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right) - x\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(2 - \frac{4}{e^x}\right)\right) =$$
$$= \ln\left(2 - \frac{4}{+\infty}\right) =$$
$$= \ln(2)$$

Assim, a reta de equação $y = -4x + \ln 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

7.2 $x \in \,]\ln 2, +\infty[$:

$$f'(x) = (\ln(2e^x - 4) - 5x)' = \left(\ln(2e^x - 4)\right)' - (5x)' =$$
$$= \frac{(2e^x - 4)'}{2e^x - 4} - 5 = \frac{2e^x}{2e^x - 4} - 5 =$$

$= \frac{e^x}{e^x-2} - 5 = \frac{e^x - 5e^x + 10}{e^x - 2} =$

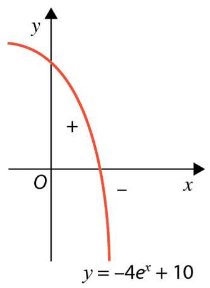
$= \frac{-4e^x+10}{e^x-2}$

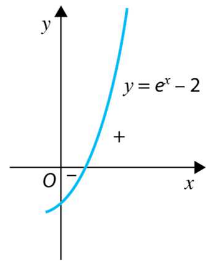
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4e^x+10}{e^x-2} = 0 \Leftrightarrow -4e^x + 10 = 0 \ \wedge \ e^x - 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \ \wedge \ e^x \neq 2$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \ \wedge x \neq \ln(2)$

x	$\ln(2)$		$\ln\left(\frac{5}{2}\right)$	$+\infty$
$-4e^x + 10$		+	0	-
$e^x - 2$		+	+	+
Sinal de f'		+	0	-
Variação de f		↗	Máx.	↘





Cálculo auxiliar

$f\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right) = \ln\left(2e^{\ln\left(\frac{5}{2}\right)} - 4\right) - 5\ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{5}{2} - 4\right) - 5\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= \ln(5-4) - 5\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= \ln(1) - 5\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= 0 - 5\ln\left(\frac{5}{2}\right) =$

$= -5\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

f é crescente em $\left]\ln(2), \ln\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ e é decrescente em $\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right), +\infty\right[$.

Tem máximo $-5\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ em $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

8. $f(x) - \frac{1}{2}\log_4(6x-5) \geq 0 \Leftrightarrow \log_4(x) - \frac{1}{2}\log_4(6x-5) \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_4(x) \geq \frac{1}{2}\log_4(6x-5)$

$\Leftrightarrow 2\log_4(x) \geq \log_4(6x-5)$

$\Leftrightarrow \log_4(x^2) \geq \log_4(6x-5)$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 6x - 5 \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ 6x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \geq 0 \ \wedge x > \frac{5}{6}$

$\Leftrightarrow (x \leq 1 \vee x \geq 5) \wedge \ x > \frac{5}{6}$

C.S. $= \left]\frac{5}{6}, 1\right] \cup [5, +\infty[$

Cálculo auxiliar

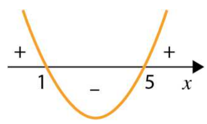
$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2}$

$\Leftrightarrow \ x = \frac{6-4}{2} \vee x = \frac{6+4}{2}$

$\Leftrightarrow \ x = 1 \vee x = 5$



9. Opção (B)

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

$$\lim\big(f(u_n)\big) = \lim_{x\to e^2} f(x) = \lim_{x\to e^2} \ln(x) = \ln(e^2) = 2$$

10. $h(t_1+5) = 1{,}35 \times h(t_1)$

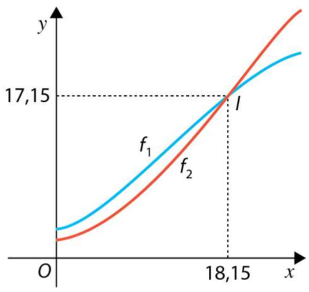
Utilizando x como variável independente:

$$h(x+5) = 1{,}35 \times h(x) \Leftrightarrow \frac{24}{1+16{,}24e^{-0{,}16(x+5)}} = 1{,}35 \times \frac{24}{1+16{,}24e^{-0{,}16x}}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = \frac{24}{1+16{,}24e^{-0{,}16(x+5)}}$$

$$f_2(x) = 1{,}35 \times \frac{24}{1+16{,}24e^{-0{,}16x}}, \quad x > 0$$



$t_1 \approx 18{,}2$