

Teste N.º 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

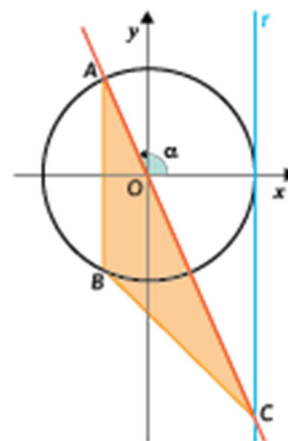
1. No passado dia 9 de fevereiro, Portugal garantiu, pela primeira vez, o apuramento para o Campeonato da Europa feminino de basquetebol, após vencer a Sérvia por 57-40.
- No final do jogo, o selecionador nacional, os seus dois treinadores-adjuntos e as quatro jogadoras mais pontuadoras da partida dispuseram-se, lado a lado, para tirar uma fotografia.
- Qual das expressões seguintes representa o número de maneiras diferentes de dispor estas sete pessoas, ficando o selecionador nacional e os seus dois treinadores-adjuntos todos separados?

(A) ${}^5C_3 \times 7!$ (B) ${}^5C_3 \times 3! \times 4!$ (C) ${}^7C_3 \times 7!$ (D) ${}^7C_3 \times 3! \times 4!$

2. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox ;
- o ponto C é o ponto de interseção da reta AO com a reta r ;
- o ângulo de amplitude α tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta OA ($\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$).



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α , pela expressão:

$$A(\alpha) = \sin \alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

3. Seja f uma função diferenciável, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, cuja derivada, f' , é dada por:

$$f'(x) = 2 \cos x + \sin(2x)$$

3.1 Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2 + x}$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3.2 Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto a existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , caso este(s) exista(m).

4. Seja h a função definida por $h(x) = \ln(e^{2x} - e^x - 2)$.

Qual é o domínio da função h ?

(A) $\mathbb{R}^+$

(B) $] -\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

(C) $\mathbb{R}^+ \setminus \{\ln 2\}$

(D) $\mathbb{R} \setminus] -\infty, \ln 2]$

5. Seja g uma função contínua, de domínio $] -\infty, 0]$, e seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq 0 \\ \ln^2 x - 6 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.1 A reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 1$

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = -1$

(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x - 1) = 0$

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$

Resolva os itens 5.2 e 5.3 sem recorrer à calculadora.

5.2 Sejam r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 e s a reta perpendicular à reta r que intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa 12.

Determine a equação reduzida da reta s .

5.3 Seja a um número real tal que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 11x + 24}{\sin(x-3)} = a$.

Determine, em $\mathbb{R}^+$, o conjunto de números reais que verificam a condição $f(x) = a$.

6. Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - e^{2x-2}} & \text{se } x < 1 \\ \frac{5x - 4}{1 - e^{-x}} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os itens 6.1 e 6.2 sem recorrer à calculadora.

6.1 Averigue se existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

6.2 O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua, quando x tende para $+\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

7. Na figura estão representadas as funções f e g definidas, respetivamente, por:

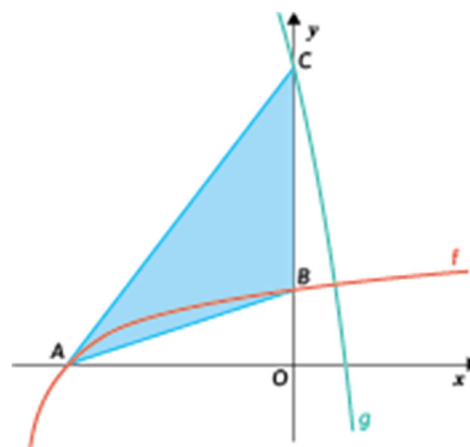
$$f(x) = \log(2x + 10) \text{ e } g(x) = -2^{x+2} + 8$$

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e tem ordenada nula;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Oy ;
- o ponto B pertence ao gráfico de f e o ponto C pertence ao gráfico de g .

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

- (A) $\frac{27}{4}$ (B) $\frac{3 \log 5}{2}$ (C) $\frac{27}{2}$ (D) $\frac{3 \log 5}{4}$



8. Seja h a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$, definida por:

$$h(x) = 3 \log_{64}(1 + \sin x) + \log_4(1 - \sin x) + \log_2(4 \sin x)$$

Mostre que $h(x) = 1 + 2 \log_4(\sin(2x))$.

9. A quantidade de água V (em litros) presente num reservatório em processo de esvaziamento, t minutos após a abertura da válvula de drenagem, é dada por:

$$V(t) = \frac{2158}{1 - 0,24e^{-0,2t}}, \text{ com } 0 \leq t \leq 4$$

Nos primeiros dois minutos após a abertura da válvula, existe um instante m para o qual se verifica que, no intervalo $[m, 2m]$, o volume de água diminui 4%.

Determine, recorrendo à calculadora, a amplitude desse intervalo.

Apresente o resultado em segundos, com arredondamento às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	7.	8.	9.	TOTAL
10	18	10	18	10	10	20	20	18	18	10	20	18	200