TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

$^5C_2 \times 3^3 - \ ^5C_2 \times 1 = 260$

2. Opção (D)

$$P\left(B \cap \left(\overline{A \cap B}\right)\right) = P\left(B \cap \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right)\right) =$$
$$= P\left(\left(B \cap \bar{A}\right) \cup \left(B \cap \bar{B}\right)\right) =$$
$$= P\left(\left(B \cap \bar{A}\right) \cup \emptyset\right) =$$
$$= P\left(B \cap \bar{A}\right) =$$
$$= 0{,}17$$

Cálculos auxiliares

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}65$

$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow 0{,}65 = 0{,}48 + P(\bar{A} \cap B)$

$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0{,}17$

3. I – a); **II** – c); **III** – c); **IV** – b)

$n = 10$, logo o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ é constituído por $10 + 1 = 11$ termos e a soma dos coeficientes binomiais é igual a $2^{10} = 1024$.

O termo central ocupa a 6.ª posição.

O desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, com $x > 0$, ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela, é constituído por termos do tipo:

$$^{10}C_p \ \left(\frac{1}{x}\right)^{10-p} \times \left(\frac{-x}{\sqrt[3]{x}}\right)^p = \ ^{10}C_p \ 1^{10-p} \times (x^{-1})^{10-p} \times (-1)^p \times x^p \times \left(x^{\frac{-1}{3}}\right)^p =$$
$$= \ ^9C_p \ (-1)^p \times x^{-10+p+p-\frac{1}{3}p} =$$
$$= \ ^9C_p \ (-1)^p \times x^{-10+\frac{5}{3}p}$$

Para determinarmos o termo independente, procuramos encontrar o valor de p tal que $-10 + \frac{5}{3}p = 0$.

Assim:

$-10 + \frac{5}{3}p = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}p = 10 \Leftrightarrow p = 6$

Portanto, o termo independente é $^{10}C_6 \ (-1)^6 \times x^{-10+\frac{5}{3}\times 6} = \ ^{10}C_6 \ (-1)^6 = 210$.

4.

4.1 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\cos\left(ax-2a-\frac{3\pi}{2}\right)}{2x-x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-\text{sen}(ax-2a)}{2x-x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-\text{sen}(a(x-2))}{-x(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\text{sen}(a(x-2))}{x(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{\text{sen}(a(x-2))}{x(x-2)} \times \frac{a}{a}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{a}{x} \times \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\text{sen}(a(x-2))}{a(x-2)} =$

$= \frac{a}{2} \times \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{\text{sen}(a(x-2))}{a(x-2)} =$

Considerando a mudança de variável $y = a(x-2)$; $x \to 2^+ \underbrace{\Rightarrow}_{a\in\mathbb{R}^+} y \to 0^+$:

$= \frac{a}{2} \times \underbrace{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\text{sen}y}{y}}_{\text{limite notável}} =$

$= \frac{a}{2} \times 1 =$

$= \frac{a}{2}$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{2^2-2}{2^2-6\times 2+9}$$

$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = 2$

$\Leftrightarrow a = 4$

Assim, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$, para $a = 4$.

4.2 Em $]-\infty, 2[$:

$f'(x) = \left(\frac{x^2-x}{x^2-6x+9}\right)' = \frac{(x^2-x)'(x^2-6x+9)-(x^2-x)(x^2-6x+9)'}{(x^2-6x+9)^2} =$

$= \frac{(2x-1)(x^2-6x+9)-(x^2-x)(2x-6)}{[(x-3)^2]^2} =$

$= \frac{2x^3-12x^2+18x-x^2+6x-9-(2x^3-6x^2-2x^2+6x)}{(x-3)^4} =$

$= \frac{2x^3-13x^2+24x-9-2x^3+6x^2+2x^2-6x}{(x-3)^4} =$

$= \frac{-5x^2+18x-9}{(x-3)^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-5x^2+18x-9}{(x-3)^4} = 0 \Leftrightarrow -5x^2+18x-9 = 0 \land (x-3)^4 \neq 0$

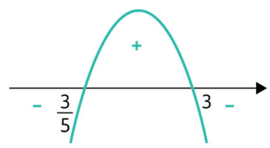
$\Leftrightarrow x = \frac{-18\pm\sqrt{(-18)^2-4\times(-5)\times(-9)}}{2\times(-5)} \land x-3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-18 \pm 12}{-10} \wedge x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{5} \vee x = 3\right) \wedge x \neq 3$$

No intervalo $]-\infty, 2[$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{5}$		2
$-5x^2 + 18x - 9$	$-$	0	$+$	
$(x-3)^4$	$+$	$+$	$+$	
Sinal de f'	$-$	0	$+$	n.d.
Variação de f	↘	mín	↗	n.d.



f é decrescente em $\left]-\infty, \frac{3}{5}\right]$ e é crescente em $\left[\frac{3}{5}, 2\right[$.

Apresenta mínimo absoluto em $x = \frac{3}{5}$.

5. Opção (B)

1.º processo

Considerando a tabela de sinal de f'', fornecida no enunciado, podemos concluir acerca das concavidades do gráfico da função f:

x	$-\infty$	-6		2		6	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Concavidade do gráfico de f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪		∩

Uma vez que o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f por meio de uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(2, 0)$, seguida de uma simetria em relação ao eixo Ox e de posterior translação vertical associada ao vetor de coordenadas $(0, 1)$, podemos concluir acerca das concavidades do gráfico de g:

x	$-\infty$	-4		4		8	$+\infty$
Concavidade do gráfico de g	∩	P.I.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪

Desta forma, concluímos que, no intervalo $]-4, 4[$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.

2.º processo

Comecemos por determinar $g'(x)$, primeira derivada da função g:

$g'(x) = (-f(x-2) + 1)' =$

$\quad = \left(-f(x-2)\right)' + (1)' =$

$= -(x-2)' \times f'(x-2) + 0 =$

$= -f'(x-2)$

Agora, vamos determinar $g''(x)$, segunda derivada da função g:

$g''(x) = \left(-f'(x-2)\right)' =$

$= -(x-2)' \times f''(x-2) =$

$= -f''(x-2)$

Podemos concluir que o gráfico de g'' é obtido a partir do gráfico de f'' por meio de uma translação horizontal associada ao vetor de coordenadas $(2, 0)$, seguida de uma simetria em relação ao eixo Ox.

Desta forma, e considerando a tabela de sinal de f'', fornecida no enunciado, podemos concluir acerca do sinal da função g'':

x	$-\infty$	-4		4		8	$+\infty$
Sinal de g''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Uma vez que g'' é positiva em $]-4, 4[$, podemos concluir que, neste intervalo, o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima.

6. Em função de x, a área do trapézio $[ABCD]$ é dada pela seguinte expressão:

$$A(x) = \frac{f(x+6) + f(6)}{2} \times x, \qquad x > 0$$

Como $f(6) = \frac{\sqrt{8\times 6^3 + 6^2}}{6+1} = \frac{42}{7} = 6$, então:

$$A(x) = \frac{f(x+6)+6}{2} \times x$$

Pretende-se mostrar que existe, pelo menos, um número real a, pertencente ao intervalo $]4, 6[$, para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 40, isto é, que a condição $A(a) = 40$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]4, 6[$.

A função A é contínua em $[4, 6]$, por se tratar de operações sucessivas de funções contínuas nesse intervalo.

$A(4) = \frac{f(4+6)+6}{2} \times 4 = (f(10) + 6) \times 2 = \left(\frac{\sqrt{8\times 10^3 + 10^2}}{10+1} + 6\right) \times 2 \approx 28{,}4$

$A(6) = \frac{f(6+6)+6}{2} \times 6 = (f(12) + 6) \times 3 = \left(\frac{\sqrt{8\times 12^3 + 12^2}}{12+1} + 6\right) \times 3 \approx 45{,}3$

Logo, $A(4) < 40 < A(6)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists\, a \in\,]4, 6[: A(a) = 40$.

Prova-se, assim, que existe, pelo menos, um número real a, pertencente ao intervalo $]4, 6[$, para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 40.

7. A primeira proposição é falsa, pois, para que a reta de equação $y = 4$ fosse assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ teria de ser igual a 4. Tal é contrariado pela informação dada no enunciado, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = 4$.

De $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = 4$, podemos concluir que $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-x)) - 4 = 0$, isto é, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-x+4)) = 0$ e, portanto, o gráfico de f admite assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$, cuja equação é $y = -x+4$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -1$.

$$\lim_{x\to-2}\frac{\left(f(x)\right)^2+4f(x)}{x^2-4} \times \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x\to-2}\frac{f(x)\times(f(x)+4)}{(x-2)(x+2)} \times (-1) = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x-2} \times \lim_{x\to-2}\frac{f(x)+4}{x+2} = 2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(-2)}{-2-2} \times \lim_{x\to-2}\frac{f(x)-(-4)}{x-(-2)} = 2$$

(1) Como f é diferenciável em -2, então f é contínua em -2, logo $\lim_{x\to-2} f(x) = f(-2)$.

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{-4}{-4} \times f'(-2) = 2$$

(2) Como f é diferenciável em -2, então $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-(-4)}{x-(-2)} = f'(-2)$.

$$\Leftrightarrow f'(-2) = 2$$

$f'(-2) = 2$, pelo que o declive da reta tangente ao gráfico da função em $x = -2$ é 2.

A proposição II é falsa, pois a reta de equação $y = -2x - 8$ tem declive -2 e, pelo exposto, não pode ser tangente ao gráfico de f em $x = -2$.

8. Opção (A)

Sejam a e b $(a < b)$ as abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f'' com o eixo Ox.

Por observação do gráfico de f'', podemos concluir acerca do sinal de f'' e, consequente, variação da função f'.

Desta forma, temos que:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f'	↗	Máximo relativo	↘	mínimo relativo	↗

Sendo a e b valores positivos, o único gráfico que está de acordo com a tabela é o que se apresenta na opção (A).

9.

9.1 $g(x) = \cos(2x) - 6\,\text{sen}\,(2x) + 1 \Leftrightarrow \cos x - 6\,\text{sen}\,(2x) = \cos(2x) - 6\,\text{sen}\,(2x) + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1$

$\Leftrightarrow \cos x = 2\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\,(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \ \vee \ \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \vee \ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.2 $g'(x) = \left(\cos x - 6\text{sen}\,(2x)\right)' = -\text{sen}\,x - 6 \times 2\cos(2x) =$

$= -\text{sen}\,x - 12\cos(2x)$

$g'(\pi) = -\text{sen}\,\pi - 12\cos(2\pi) = 0 - 12 \times 1 = -12$

Como $g'(\pi) = -12$, tem-se que o declive da reta r é -12.

$g(\pi) = \cos\pi - 6\,\text{sen}\,(2\pi) = -1 - 0 = -1$

$y = -12x + b$

$-1 = -12\pi + b \Leftrightarrow b = 12\pi - 1$

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = -12x + 12\pi - 1$ e as coordenadas do ponto de interseção de r com o eixo Oy são $(0, 12\pi - 1)$.

10.

10.1 Uma vez que a circunferência C_1 é trigonométrica e que o raio da circunferência C_2 é o triplo do raio da circunferência C_1, tem-se que o raio de C_1 é 1 e que o raio de C_2 é 3.

Desta forma, e de acordo com a informação fornecida no enunciado, temos que as coordenadas dos pontos A, B, C e D, em função de α, são:

$A(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$; $B(3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$; $C(3\cos\alpha, -3\,\text{sen}\,\alpha)$; $D(\cos\alpha, -\text{sen}\,\alpha)$

Assim, a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de α, por:

$A(\alpha) = \frac{6\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha}{2} \times (-3\cos\alpha + \cos\alpha) =$

$= \frac{8\,\text{sen}\,\alpha}{2} \times (-2\cos\alpha) =$

$= \frac{8 \operatorname{sen} \alpha}{2} \times (-2 \cos \alpha) =$

$= 4 \operatorname{sen} \alpha \times (-2 \cos \alpha) =$

$= -4 \times 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha =$

$= -4 \operatorname{sen}(2\alpha)$

10.2 $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$A(\alpha) = -4 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{14}}{9}$

Cálculo auxiliar

$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \frac{2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{2}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{7}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, pelo que $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.