TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Seja A o acontecimento "são selecionados, no máximo, três jogadores que jogam em equipas estrangeiras".

Desta forma, $\bar{A}$ corresponde ao acontecimento "são selecionados exatamente quatro jogadores que jogam em equipas estrangeiras".

Uma vez que, de entre os 18 atletas convocados, 11 são atletas que jogam equipas portuguesas, significa que 7 são atletas que jogam em equipas estrangeiras.

Assim, ${}^{7}C_4$ corresponde ao número de formas distintas de serem escolhidos 4 atletas, de entre os 7 convocados que jogam em equipas estrangeiras.

Existem ${}^{18}C_4$ formas distintas de se escolher 4 atletas de entre os 18 convocados.

Assim, aplicando a lei de Laplace, $P(\bar{A}) = \frac{{}^{7}C_4}{{}^{18}C_4} = \frac{7}{612}$.

Desta forma, $P(A) = 1 - \frac{7}{612} = \frac{605}{612}$.

2. $P(A \cap B) = P(\overline{A \cup B}) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - P(A \cup B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(B) = 1 - P(A)$

Uma vez que $P(A) = 0{,}34$, podemos concluir que $P(B) = 1 - 0{,}34 = 0{,}66$.

3. Opção (A)

${}^{n}C_5 + (-\,{}^{n}C_{10}) = 0 \Leftrightarrow {}^{n}C_5 = {}^{n}C_{10}$

Assim:

$n - 5 = 10 \Leftrightarrow n = 15$

Sabe-se que a soma dos dois primeiros elementos escolhidos foi 2, o que significa que foram escolhidos o primeiro e o último elementos da linha (ambos iguais a 1).

A linha 15 é constituída por 16 elementos, pelo que existem 14 possibilidades de escolha possível para o terceiro elemento.

O nono elemento da linha 15 é ${}^{15}C_8$ e ${}^{15}C_8 = {}^{15}C_7$, pelo que existem 2 casos favoráveis.

Desta forma, a probabilidade pedida é igual a $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

4. Pretende-se determinar a equação reduzida da reta r, reta tangente ao gráfico da função g' no ponto de abcissa a.

Comecemos por determinar o valor de a:

$$a = \lim_{x\to-2} \frac{-3-3g(x)}{x^2+x-2} = -3 \times \lim_{x\to-2} \frac{g(x)+1}{(x+2)(x-1)} =$$

$$= -3 \times \lim_{x\to-2} \frac{1}{x-1} \times \underbrace{\lim_{x\to-2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2}}_{g'(-2)} =$$

$$\overset{(1)}{=} -3 \times \frac{1}{-3} \times g'(-2) =$$

$$= g'(-2) =$$

$$= \frac{3(-2)^2+6(-2)-2}{(-2)^2+2(-2)+1} =$$

$$= \frac{3\times4-12-2}{4-4+1} =$$

$$= -2$$

Cálculo auxiliar

	1	1	−2
−2		−2	2
	1	−1	$\boxed{0}$

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

(1) Como g admite derivada finita em $x = -2$:

$\lim_{x\to-2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = g'(-2)$

Assim, pretende-se a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g' em $x = -2$, cujo declive será igual a $g''(-2)$.

$$g''(x) = \left(\frac{3x^2+6x-2}{x^2+2x+1}\right)' = \frac{(3x^2+6x-2)' \times (x^2+2x+1) - (3x^2+6x-2)(x^2+2x+1)'}{(x^2+2x+1)^2} =$$

$$= \frac{(6x+6) \times (x^2+2x+1) - (3x^2+6x-2) \times (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$g''(-2) = \frac{(6\times(-2)+6) \times ((-2)^2+2\times(-2)+1) - (3(-2)^2+6\times(-2)-2) \times (2\times(-2)+2)}{((-2)^2+2(-2)+1)^2} =$$

$$= \frac{-6\times1-(-2)\times(-2)}{1} = -10$$

Desta forma, tem-se que $r: y = -10x + b$.

$g'(-2) = -2$, pelo que o ponto de coordenadas $(-2, -2)$ pertence à reta.

$-2 = -10 \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -22$

Assim, a equação reduzida da reta r é $y = -10x - 22$.

5. Opção (D)

f é uma função par, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-4, 4\}$, pelo que, sabendo que $\lim_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$, pode concluir-se que $\lim_{x\to4^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x-7\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+7\right)\right)=0$, de onde se conclui que a reta de equação $y=-\frac{3}{2}x+7$ é assíntota não vertical ao gráfico de f para $x\to-\infty$.

Do mesmo modo, uma vez que f é uma função par, a reta de equação $y=\frac{3}{2}x+7$ é assíntota não vertical ao gráfico de f, para $x\to+\infty$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{3}{2}$.

Desta forma:

$$\lim_{x\to4^+}\frac{x}{f(x)}=\frac{4}{\lim\limits_{x\to4^+}f(x)}=\frac{4}{-\infty}=0$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{4xf(x)-8f(x)}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\times(4x-8)}{x^2-2x}&=4\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\times(x-2)}{x(x-2)}=\\&=4\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\\&=4\times\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\\&=4\times\frac{3}{2}=\\&=6\end{aligned}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x}{f(x)}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4xf(x)-8f(x)}{x^2-2x}=0-6=-6$.

6.

6.1 $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{9x^2+3x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}\right)=1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}=$

$$\begin{aligned}&=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x}\right)}}{x}=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{9+\frac{3}{x}}}{x}=\\&=1-\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\times\sqrt{9+\frac{3}{x}}}{x}=1+\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9+\frac{3}{x}}=\\&=1+3=4\end{aligned}$$

$b=\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2+3x}-4x\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}+3x\right)=$

$$\begin{aligned}&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)(\sqrt{9x^2+3x}-3x)}{\sqrt{9x^2+3x}-3x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+3x-9x^2}{\sqrt{9x^2+3x}-3x}=\\&=-\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{3}{x}\right)}-3x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\times\sqrt{9+\frac{3}{x}}-3x}=\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x\times\left(\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}=\\&=\frac{3}{3+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Desta forma, uma equação da assíntota oblíqua ao gráfico de g, quando $x\to-\infty$, é $y=4x+\frac{1}{2}$.

6.2 Em $[0, \pi[$:

$$g'(x) = \left((2-2x)\text{sen}x - (2+2x)\cos x\right)' =$$
$$= (2-2x)' \times \text{sen}x + (2-2x) \times (\text{sen}x)' - \left((2+2x)' \times \cos x + (2+2x) \times (\cos x)'\right) =$$
$$= -2 \times \text{sen}x + (2-2x) \times \cos x - \left(2 \times \cos x + (2+2x) \times (-\text{sen}x)\right) =$$
$$= -2\text{sen}x + 2\cos x - 2x \times \cos x - 2\cos x + 2\text{sen}x + 2x \times \text{sen}x =$$
$$= -2x \times \cos x + 2x \times \text{sen}x =$$
$$= 2x(\text{sen}x - \cos x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(\text{sen}x - \cos x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee \text{sen}x - \cos x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee \text{sen}x = \cos x$$

No intervalo $[0, \pi[$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{\pi}{4}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
Sinal de g'	0	$-$	0	$+$	
Variação de f	Máx.	↘	Mín	↗	n.d.

Cálculo auxiliar

$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$:

$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\pi}{6} \times \left(\text{sen}\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$

$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \pi$:

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{\pi}{2} \times \left(\text{sen}\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = \pi \times (1 - 0) > 0$

g é decrescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e crescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right[$.

Apresente máximo relativo em $x = 0$ e mínimo relativo em $x = \frac{\pi}{4}$.

6.3 Pretende-se mostrar que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é simétrica da abcissa, no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[$, isto é, que a condição $g(x) = -x$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[$, ou seja, pretende-se provar que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[: g(c) = -c$, o que é equivalente a:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[: g(c) + c = 0$$

Desta forma, seja h a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$, definida por $h(x) = g(x) + x$.

h é contínua em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$, por se tratar de operações sucessivas de funções contínuas nesse intervalo.

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} = \left(2 - 2 \times \frac{\pi}{3}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(2 + 2 \times \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} =$$
$$= \left(2 - \frac{2\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(2 + \frac{2\pi}{3}\right)\frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} =$$
$$= \left(1 - \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{3} - \left(1 + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} =$$
$$= \sqrt{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} =$$
$$= \frac{3\sqrt{3} - \pi\sqrt{3} - 3}{3} = \frac{\sqrt{3}(3-\pi) - 3}{3} < 0$$

$$h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{3\pi}{4} = \left(2 - 2 \times \frac{3\pi}{4}\right)\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \left(2 + 2 \times \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{3\pi}{4} =$$
$$= \left(2 - \frac{3\pi}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2 + \frac{3\pi}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3\pi}{4} =$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{3\pi}{4} =$$
$$= 2\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4} > 0$$

Logo, $h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 < h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[: g(c) + c = 0, \text{ ou seja, } \exists c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[: g(c) = -c$$

Prova-se assim, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é simétrica da abcissa, no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

7.

7.1 O pentágono $[OABDE]$ pode ser dividido em dois polígonos distintos: no trapézio $[OABC]$ e no retângulo $[OCDE]$. Desta forma, a área do pentágono $[OABDE]$ pode ser calculada somando a área de cada um dos polígonos indicados.

Considerando os dados do enunciado, podemos afirmar que:

- as coordenadas do ponto A são $(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$;
- as coordenadas do ponto B são $(1, \text{sen}\alpha)$;
- as coordenadas do ponto C são $(1, 0)$.

A amplitude do ângulo convexo AOF é igual a α, pelo que a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}F$ é igual a 2α.

Desta forma, as coordenadas do ponto F são $(\cos(2\alpha), \text{sen}(2\alpha))$.

O ponto F' é simétrico do ponto F em relação à origem, pelo que as coordenadas são $(-\cos(2\alpha), -\text{sen}(2\alpha))$.

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{1 + 1 - \cos\alpha}{2} \times \text{sen}\alpha = \frac{2\text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} =$$
$$= \text{sen}\alpha - \frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$A_{[OCDE]} = \overline{OC} \times \overline{CD} = 1 \times \text{sen}(2\alpha) = \text{sen}(2\alpha)$$

Assim:

$$A(\alpha) = \text{sen}\alpha - \frac{\text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} + \text{sem}(2\alpha) = \text{sen}\alpha - \frac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{4} + \text{sem}(2\alpha) =$$
$$= \text{sen}\alpha - \frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} + \text{sen}(2\alpha) =$$
$$= \frac{4\text{sen}\alpha + 3\text{sen}(2\alpha)}{4}$$

7.2 $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\text{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, pelo que:

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{8}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos\alpha > 0$, logo $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

$$\text{sen}(2\alpha) = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

Assim, para a posição do ponto A, em que $\text{sen}(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, o valor exato da área do pentágono $[OABDE]$ é igual a $\frac{4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}}{4} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}}{4} = \frac{12\sqrt{2}}{12} = \sqrt{2}$.

8. Opção (C)

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
Variação de f'	↗	Máx.	↘	Mín	↗		↗

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	∪	P.I.	∩	P.I.	∪		∪

Desta forma, a opção (A) está errada, pois o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[-2,-1]$, logo, não é possível o gráfico de f ter a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$.

A opção (B) também está errada, pois f' é crescente em $]-\infty,-2]$.

A opção (C) está correta, pois em $[3,+\infty[$ f' é crescente.

A opção (D) está errada, pois em $[-1, 3]$ o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.

9. Opção (B)

$$\lim_{x\to-1}\frac{4\text{sen}^2(x+1)\cos^2(x+1)}{x^3+4x^2+5x+2} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{\left(2\,\text{sen}(x+1)\cos(x+1)\right)^2}{x^3+4x^2+5x+2} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{\left(\text{sen}\left(2(x+1)\right)\right)^2}{(x+1)^2(x+2)} =$$

Cálculo auxiliar

$$4\text{sen}^2(x+1)\cos^2(x+1) = (2\text{sen}(x+1)\cos(x+1))^2 =$$

$$= (\text{sen}(2(x+1)))^2$$

	1	4	5	2
-1		-1	-3	-2
	1	3	2	0
-1		-1	-2	
	1	2	0	

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{\left(\text{sen}(2(x+1))\right)^2}{(x+1)^2} \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x+2} =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \left(\frac{\text{sen}(2(x+1))}{x+1} \times \frac{\text{sen}(2(x+1))}{x+1}\right) \times 1 =$

$= \lim\limits_{x\to -1} \frac{\text{sen}(2(x+1))}{x+1} \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{\text{sen}(2(x+1))}{x+1} =$

$= 4 \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{\text{sen}(2(x+1))}{2(x+1)} \times \lim\limits_{x\to -1} \frac{\text{sen}(2(x+1))}{2(x+1)} =$

Considerando a mudança de variável $y = 2(x+1)$; $x \to -1 \Rightarrow y \to 0$:

$= 4 \times \underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} \times \underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} =$

$= 4 \times 1 \times 1 =$

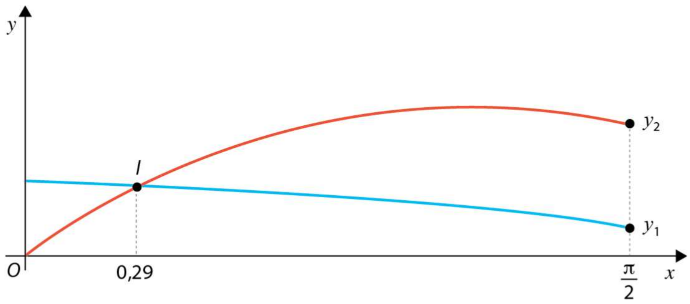
$= 4$

10. Pretende-se determinar a abcissa de um ponto P, sabendo que, ao adicionarmos 1 unidade à sua abcissa, a sua ordenada passa para o dobro.

Assim:

$f(x+1) = 2f(x) \Leftrightarrow \frac{4\text{sen}(x+1)}{2-\cos(x+1)} = 2 \times \frac{4\text{sen}(x)}{2-\cos(x)}$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, obtém-se:



$y_1 = \frac{4\text{sen}(x+1)}{2-\cos(x+1)}$

$y_2 = 2 \times \frac{4\text{sen}(x)}{2-\cos(x)}$

Portanto, a abcissa do ponto P, com arredondamento às centésimas, é $0{,}29$.