Teste de Matemática A

2024 / 2025

Teste N.º 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\ \cos b + \operatorname{sen} b\ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $(k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere um teste constituído por 5 questões de escolha múltipla. Cada escolha múltipla apresenta 4 possíveis opções de resposta, A, B, C, ou D, das quais apenas uma é correta.
Quantas chaves distintas é possível constituir, utilizando exatamente duas letras A e, no máximo, duas letras B?

(A) 260 **(B)** 440 **(C)** 880 **(D)** 960

2. Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).
Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}35$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de $P\left(B \cap (\overline{A \cap B})\right)$?

(A) $0{,}24$ **(B)** $0{,}28$ **(C)** $0{,}11$ **(D)** $0{,}17$

3. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$, com $x > 0$, ordenado segundo as potências decrescentes da primeira parcela.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.
Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde.
A cada espaço corresponde uma só opção.

O desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ é constituído por __**I**__ termos, e a soma dos coeficientes binomiais é __**II**__.
O termo central ocupa a __**III**__ posição, e o termo independente deste desenvolvimento é __**IV**__.

I	II	III	IV
a) 11	**a)** 256	**a)** 4.ª	**a)** -210
b) 10	**b)** 512	**b)** 5.ª	**b)** 210
c) 9	**c)** 1024	**c)** 6.ª	**c)** -126

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(ax-2a-\frac{3\pi}{2}\right)}{2x-x^2} & \text{se } x>2\\[2ex] \dfrac{x^2-x}{x^2-6x+9} & \text{se } x\leq 2\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

4.1 Determine o valor de a $(a\in\mathbb{R}^+)$, de modo que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$.

4.2 Estude, no intervalo $]-\infty,2[$, a função f quanto a monotonia e a existência de extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

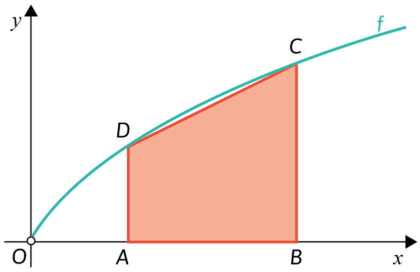
5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. A tabela com o sinal da função f'', segunda derivada de f, é a seguinte:

x	$-\infty$	-6		2		6	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Seja g a função definida por $g(x)=-f(x-2)+1$.
Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima?

(A) $]-8,0[$ **(B)** $]-4,4[$ **(C)** $]2,6[$ **(D)** $]4,8[$

6. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\frac{\sqrt{8x^3+x^2}}{x+1}$ e o trapézio $[ABCD]$.



Seja a um número real positivo.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao eixo Ox e têm abcissas 6 e $a+6$, respetivamente;
- os pontos D e C pertencem ao gráfico de f e têm abcissas 6 e $a+6$, respetivamente.

Recorrendo a métodos analíticos, mostre que existe, pelo menos, um número real a, pertencente ao intervalo $]4,6[$, para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 40.
Se utilizar a calculadora, em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, conserve uma casa decimal.

7. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável, tal que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=4$;
- $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(f(x))^2+4f(x)}{x^2-4}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$;
- o ponto de coordenadas $(-2,-4)$ pertence ao gráfico da função.

Considere as proposições.

I. A reta de equação $y=4$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

II. A reta de equação $y=-2x-8$ é tangente ao gráfico de f em $x=-2$.

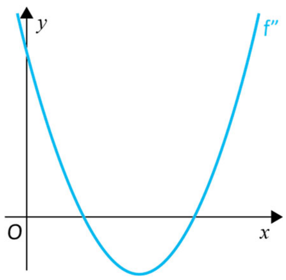
Justifique que as proposições **I** e **II** são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

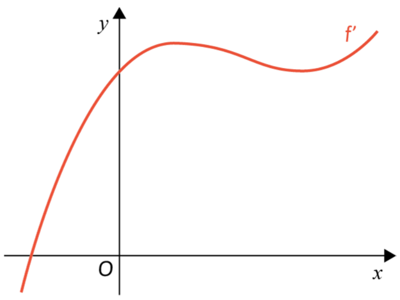
8. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de f'', segunda derivada de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.

Como se pode observar, o gráfico de f'' interseta o eixo Ox em dois pontos distintos, ambos de abcissa positiva.

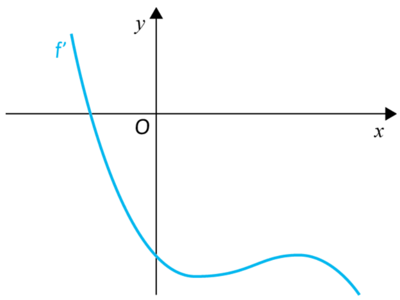
Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada de f?



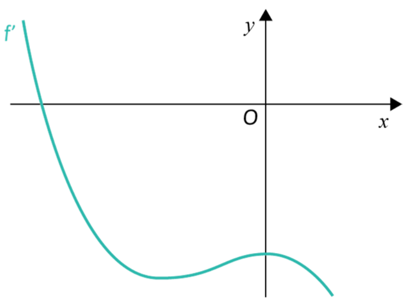
(A)



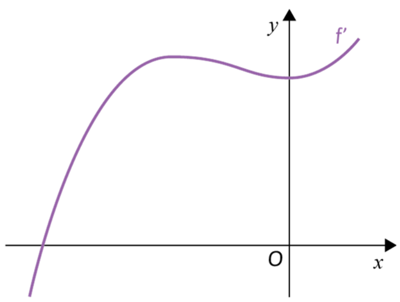
(B)



(C)



(D)



9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos x - 6\,\text{sen}(2x)$.

Resolva os dois itens sem recorrer à calculadora.

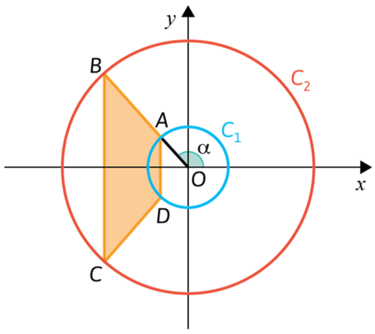
9.1 Determine o conjunto dos números reais que verificam a condição:

$$g(x) = \cos(2x) - 6\,\text{sen}(2x) + 1$$

9.2 Seja r a reta tangente ao gráfico da função g em $x = \pi$.

Determine as coordenadas do ponto de interseção de r com o eixo Oy.

10. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, duas circunferências, C_1 e C_2, ambas centradas na origem, e um trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- a circunferência C_1 é trigonométrica;
- o raio da circunferência C_2 é o triplo do raio da circunferência C_1;
- os pontos A e D pertencem à circunferência C_1, sendo D o simétrico de A, em relação ao eixo Ox;
- os pontos B e C pertencem à circunferência C_2;
- a reta BC é paralela ao eixo Oy;
- o ponto B pertence à semirreta $\dot{O}A$;
- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

10.1 Prove que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de α, pela expressão:

$$A(\alpha) = -4\,\text{sen}(2\alpha)$$

10.2 Para um determinado valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, sabe-se que $\text{sen}(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Determine, para este valor de α, o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.1**	**4.2**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1**	**9.2**	**10.1**	**10.2**	**TOTAL**
10	10	10	18	18	10	20	20	10	18	18	20	18	**200**