TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Se a todos os números naturais de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 0 a 5 retirarmos todos os números naturais de cinco algarismos diferentes formados com os algarismos de 0 a 5, obtemos todos aqueles de cinco algarismos formados com os algarismos de 0 a 5 que têm pelo menos dois algarismos iguais.

Assim, existem 5×6^4 números naturais de cinco algarismos diferentes formados com os algarismos de 0 a 5. Uma vez que o algarismo 0 não pode ocupar a primeira posição, existem cinco alternativas para o algarismo inicial e, para cada uma destas, existem seis alternativas para cada um dos quatro algarismos restantes.

No que diz respeito aos números de cinco algarismos diferentes formados com os algarismos de 0 a 5, existem $5 \times {}^5A_4$, uma vez que existem cinco alternativas para o algarismo inicial e, para cada uma destas, existem ${}^5A_4$ de serem escolhidos, ordenadamente, quatro algarismos dos cinco restantes que irão constituir o número.

$5 \times 6^4 - 5 \times {}^5A_4 = 5880$

2. Opção (C)

Uma vez que a soma dos últimos quatro elementos de uma linha n do triângulo de Pascal é 176, concluímos que a soma dos primeiros quatro elementos dessa linha é também 176, logo:

$1 + n + {}^nC_2 + {}^nC_3 = 176$

Ora, como o quarto elemento da linha seguinte é igual a 165, então ${}^{n+1}C_3 = 165$ e, portanto, ${}^nC_2 + {}^nC_3 = 165$.

Assim, substituindo ${}^nC_2 + {}^nC_3$ por 165 na expressão anterior, obtemos $1 + n + 165 = 176$, de onde se conclui que $n = 10$.

Sendo $n = 10$, o número de elementos desta linha é 11, pelo que o maior elemento da linha será o que ocupar a sexta posição, isto é ${}^{10}C_5 = 252$.

3. Número de casos possíveis: $10!$ (número de formas distintas de os dez alunos se disporem em linha reta).

Número de casos favoráveis: $2! \times {}^8A_2 \times 7!$ (existem $2!$ formas distintas de a Margarida e a Helena permutarem entre si e, para cada uma destas formas, existem ${}^8A_2$ modos distintos de selecionar, ordenadamente, duas posições de entre as oito disponíveis, a serem ocupadas pelo Joaquim e pelo Francisco, de forma que não fiquem juntos, (os 6 alunos que não são o Joaquim, a Margarida, a Helena e o Francisco e o "bloco" constituído pela Margarida e pela Helena criam 8 posições para colocar o Joaquim e o Francisco que, nestas posições, ficam sempre separados). Por fim, para cada uma destas, existem 7! formas distintas de permutar os sete elementos restantes, isto é, os seis alunos restantes, juntamente com a Margarida e a Helena que estão juntas e cuja permutação já foi contabilizada).

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^8A_2 \times 2! \times 7!}{10!} \approx 0{,}16$.

4. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{0{,}21}{P(A \cap B)} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{0{,}21}{P(A \cap B)} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{0{,}21}{P(A \cap B)}$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{P(A \cap B) \neq 0} P(A \cap B) - \left(P(A \cap B)\right)^2 = 0{,}21$$

$$\Leftrightarrow \left(P(A \cap B)\right)^2 - P(A \cap B) + 0{,}21 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 0{,}21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1 \pm 0{,}4}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1 - 0{,}4}{2} \ \vee \ P(A \cap B) = \frac{1 + 0{,}4}{2}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}3 \ \vee \ P(A \cap B) = 0{,}7$$

Como $P(A) = 0{,}45$, $P(A \cap B) \leq 0{,}45$, conclui-se que $P(A \cap B) = 0{,}3$.

$$P(B) = \frac{13}{16} P(A \cup B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{13}{16}\left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{13}{16}(0{,}45 + P(B) - 0{,}3)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{13}{16}\left(0{,}15 + P(B)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{39}{320} + \frac{13}{16} P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16} P(B) = \frac{39}{320}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{39}{320}}{\frac{3}{16}}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}65$$

$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0{,}65 - 0{,}3}{0{,}65} =$$

$$= \frac{0{,}35}{0{,}65} =$$

$$= \frac{7}{13}$$

5. Opção (A)

Número de casos possíveis: 6^3 (uma vez que há reposição, existem, para cada uma das três extrações, seis possibilidades, isto é, $6 \times 6 \times 6$).

Número de casos favoráveis: $3! + 3 + 1 = 10$ (existem três alternativas mutuamente exclusivas para que a soma dos números inscritos nas três bolas retiradas seja igual a 6: ou as bolas extraídas têm inscritos os números 1, 2 e 3 ou $1, 1$ e 4 ou $2, 2$ e 2). Para a primeira alternativa, existem $3!$ de esta acontecer, o que corresponde ao número de ordens distintas que as bolas com os números 1, 2 e 3 inscritos podem sair. Para a seguinte possibilidade, existem três formas para esta ocorrer, o que corresponde à ordem em que a bola com o número 4 inscrito pode sair. Finalmente, para a terceira possibilidade – as três bolas extraídas terem inscritas o número 2 – existe apenas uma forma desta acontecer.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$.

6. Seja n o número de elementos que constitui a equipa de investigadores.

Desta forma, $\frac{2}{5}n$ são investigadores matemáticos.

$$\frac{{}^{\frac{2}{5}n}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{13}{85} \Leftrightarrow \frac{\frac{\left(\frac{2}{5}n\right)!}{\left(\frac{2}{5}n-2\right)! \times 2!}}{\frac{n!}{(n-2)! \times 2!}} = \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\left(\frac{2}{5}n\right)\times\left(\frac{2}{5}n-1\right)\times\left(\frac{2}{5}n-2\right)!}{\left(\frac{2}{5}n-2\right)!}}{\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!\times 2!}} = \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{2}{5}n\right)\times\left(\frac{2}{5}n-1\right)}{n(n-1)} = \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}n-1\right)}{(n-1)} = \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}n - 1\right) = \frac{13}{85}(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{25}n - \frac{2}{5} = \frac{13}{85}n - \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{25}n - \frac{13}{85}n = \frac{2}{5} - \frac{13}{85}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{425}n = \frac{21}{85}$$

$$\Leftrightarrow n = 35$$

O número de investigadores que constitui esta equipa é 35.

7. $P\left(\overline{\bar{A} \cup B}\right) + \frac{P(A|B) - P(A)P(A \cap B)}{P(B) - P(\bar{A} \cap B)} =$

$= P(A \cap \bar{B}) + \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(B)} - P(A)P(A \cap B)}{P(A \cap B)} =$

$= P(A \cap \bar{B}) + \frac{P(A \cap B) \times \left(\frac{1}{P(B)} - P(A)\right)}{P(A \cap B)} =$

$\underbrace{=}_{P(A \cap B) \neq 0} P(A \cap \bar{B}) + \frac{1}{P(B)} - P(A) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + \frac{1}{P(B)} - P(A) =$

$= \frac{1}{P(B)} - P(A \cap B)$

Cálculos auxiliares

$P\left(\overline{\bar{A} \cup B}\right) = P\left(\bar{\bar{A}} \cap \bar{B}\right) = P(A \cap \bar{B})$

$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) - P(\bar{A} \cap B)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Leftrightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

8. No contexto da situação descrita, existem duas alternativas mutuamente exclusivas:

– ou o grupo que constituirá a equipa responsável pela organização do evento é constituída por exatamente três professores de treino individualizado, dois professores de aulas de grupo e três professores de pilates

– ou a equipa é constituída por exatamente três professores de treino individualizado, um professor de aulas de grupo e quatro professores de pilates.

Na primeira alternativa, ${}^{8}C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^{4}C_3$ representa o número de maneiras de escolher oito elementos que constituirão a equipa nas condições descritas. Assim, ${}^{8}C_3$ corresponde ao número de maneiras distintas de escolher três professores de treino individualizado, de entre um conjunto de oito. Por cada uma destas maneiras, existem ${}^{10}C_2$ formas distintas de escolher dois professores de aulas de grupo, de entre um total de dez, e, por cada uma destas, existem ${}^{4}C_3$ formas distintas de escolher três professores de pilates, de entre um conjunto de quatro.

Na segunda alternativa, ${}^{8}C_3 \times 10$ representa o número de maneiras de escolher oito elementos que constituirão a equipa formada, de acordo com os requisitos referidos. Assim, ${}^{8}C_3$ corresponde ao número de maneiras distintas de escolher três professores de treino individualizado, de entre um conjunto de oito. Por cada uma destas maneiras, existem dez alternativas de escolha de um professor de aulas de grupo e, para cada uma destas, existe uma única forma de escolher um grupo de quatro professores de pilates.

Assim, ${}^{8}C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^{4}C_3 + {}^{8}C_3 \times 10$ corresponde a uma expressão que permite determinar o número de equipas distintas.

${}^{8}C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^{4}C_3 + {}^{8}C_3 \times 10 = {}^{8}C_3 \times \left({}^{10}C_2 \times {}^{4}C_3 + 10\right)$

9. Opção (C)

Número de casos possíveis: ${}^{12}C_3$ (número de formas distintas de escolher 3 vértices de entre os 12 existentes).

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_3 \times 2$ (existem duas alternativas mutuamente exclusivas para que o plano definido pelos 3 vértices escolhidos seja perpendicular ao eixo Ox ou são escolhidos três vértices de entre os vértices A, E, L e H ou são escolhidos três vértices de entre os vértices B, D, K e I. Para cada uma destas alternativas, existem ${}^{4}C_3$ formas distintas para a escolha dos três vértices, de entre os quatro vértices referidos).

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^{4}C_3 \times 2}{{}^{12}C_3} = \frac{8}{220} = \frac{2}{55}$.

10. No contexto da situação descrita, $P(Y|X)$ representa a probabilidade de a bola retirada da caixa C_2 ser branca, sabendo que foram retiradas duas bolas de cor diferente caixa C_1.

Desta forma, uma vez que as duas bolas retiradas da caixa C_1 foram acrescentadas à caixa C_2, esta passou a ser constituída por 21 bolas, das quais consideremos que n são brancas.

$P(Y|X) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{n}{21} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow n = 9$

Ora, sabendo que foram acrescentadas duas bolas de cor diferente à caixa C_2, isso significa que inicialmente esta era constituída por $9 - 1 = 8$ bolas brancas e $19 - 8 = 11$ bolas pretas.

11.

11.1 Opção (D)

$$\lim u_n = \lim\left(\frac{2n^2+1}{n}\right) = \lim\left(2n + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= +\infty + 0 =$$
$$= +\infty$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 4x^2 + 8x - 16}{x^2 + x - 6} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{16}{x^3}\right)}{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} =$$
$$= \frac{+\infty(2 - 0 + 0 - 0)}{1 + 0 - 0} =$$
$$= +\infty$$

11.2 f é contínua em $x = 2$ se existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, isto é, se $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$:

- $f(2) = \frac{16}{5}$

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x^3-4x^2+8x-16}{x^2+x-6} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(2x^2+8)}{(x+3)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x^2+8}{x+3} =$

$= \frac{16}{5}$

Cálculos auxiliares

	2	−4	8	−16
2		4	0	16
	2	0	8	0

$2x^3 - 4x^2 + 8x - 16 = (x-2)(2x^2+8)$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 2$

$x^2 - 5x + 6 = (x+3)(x-2)$

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{2-\sqrt{14-5x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x^2-4)(2+\sqrt{14-5x})}{(2-\sqrt{14-5x})(2+\sqrt{14-5x})} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x^2-4)(2+\sqrt{14-5x})}{(2)^2-(\sqrt{14-5x})^2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x^2-4)(2+\sqrt{14-5x})}{4-(14-5x)}$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x^2-4)(2+\sqrt{14-5x})}{-10+5x} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{14-5x})}{5(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+2)(2+\sqrt{14-5x})}{5} =$

$= \frac{4 \times (2+2)}{5} =$

$= \frac{16}{5}$

Como $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \frac{16}{5}$, f é contínua em $x = 2$

12. f é contínua em $]-\infty, 3[$, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas, pelo que apenas a reta de equação $x = 3$ poderá ser assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2-\sqrt{x^2+1}}{x-3} =$

$= \frac{2-\sqrt{10}}{0^-} =$

$= +\infty$

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$, conclui-se que a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{x^2+1}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{x^2}\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-|x|\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2-(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2+x\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{2}{x}+\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\ \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{0+\sqrt{1+0}}{1-0} =$$

$$= 1$$

Portanto, a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f, quando $x \to -\infty$.